IST - LEGM e MEC - Álgebra Linear - $1^o$ semestre 2018/2019

**Sistemas lineares e matrizes**

1. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares.

**(i)** $\begin{cases} 4x - 2y = 5 \\ -6x + 3y = 1 \end{cases}$ **(ii)** $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 7y = 3 \end{cases}$ **(iii)** $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 3x + 6y = 15 \end{cases}$

**(iv)** $\begin{cases} 2x + y - 3z = 5 \\ 3x - 2y + 2z = 5 \\ 5x - 3y - z = 16 \end{cases}$ **(v)** $\begin{cases} x + 2y + 3z = 3 \\ 2x + 3y + 8z = 4 \\ 3x + 2y + 17z = 1 \end{cases}$ **(vi)** $\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 5 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ 4x - y + 4z = 1 \end{cases}$

**(vii)** $\begin{cases} x + 5y + 4z - 13w = 3 \\ 3x - y + 2z + 5w = 2 \\ 2x + 2y + 3z - 4w = 1 \end{cases}$ **(viii)** $\begin{cases} 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 - 6x_3 + 9x_4 = 7 \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 4 \\ 100x_2 + 150x_3 - 200x_4 = 50 \end{cases}$

**(ix)** $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x - 2y = 5 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$ **(x)** $\begin{cases} x + 2y \ - z + 3w = 3 \\ 2x + 4y + 4z + 3w = 9 \\ 3x + 6y - z + 8w = 10 \end{cases}$

2. Diga para que valores de $a, b$ e $c$ têm soluções os sistemas.

**a)** $\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 3x - y + 2z = b \\ x - 5y + 8z = c \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x - 2y + 4z = a \\ 2x + 3y - z = b \\ 3x + y + 2z = c \end{cases}$

3. Para cada parâmetro real $\alpha$, considere o sistema de equações lineares de variáveis reais cuja matriz aumentada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ \alpha & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Determine, justificando, os valores de $\alpha$ para os quais o sistema anterior tem solução única.

4. Para cada parâmetro real $\alpha$, considere o sistema de equações lineares de variáveis reais cuja matriz aumentada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & \alpha & -1 \\ \alpha & 0 & \alpha & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Determine, justificando, os valores de $\alpha$ para os quais o sistema anterior é impossível e calcule a solução geral do sistema correspondente a $\alpha = 1$.

5. Para cada parâmetro real $\alpha$, considere o sistema de equações lineares de variáveis reais cuja matriz aumentada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 10 \\ 2 & 7 & 2 & 20 \\ 1 & 5 & \alpha & 10 \end{array}\right].$$

**a)** Classifique, em função de $\alpha$, o sistema de equações lineares anterior.

**b)** Para $\alpha = 4$, determine o conjunto solução do sistema de equações lineares correspondente.

6. Para cada parâmetro real $\alpha$, considere o sistema de equações lineares de variáveis reais cuja matriz aumentada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 \\ \alpha & 0 & -1 & -2 \\ 0 & \alpha & -1 & -1 \end{array}\right].$$

Determine, justificando, os valores de $\alpha$ para os quais o sistema anterior é possível e indeterminado, e calcule a solução geral do sistema correspondente a $\alpha = 1$.

7. Classifique em função do parâmetro real $\alpha$ os seguintes sistemas de equações lineares (nas variáveis $x, y$ e $z$). Nos casos em que existirem soluções, determine-as.

**(i)** $\begin{cases} x + 2y + \alpha z = 1 \\ 2x + \alpha y + 8z = 3 \end{cases}$ **(ii)** $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = \alpha \\ x + y + \alpha z = \alpha^2 \end{cases}$ **(iii)** $\begin{cases} x + y + \alpha z = 2 \\ 3x + 4y + 2z = \alpha \\ 2x + 3y - z = 1 \end{cases}$

**(iv)** $\begin{cases} -x + y + \alpha z = 1 \\ 2x + \alpha y - 2\alpha z = \alpha \\ -\alpha x + \alpha y + z = -1 + 2\alpha \end{cases}$ **(v)** $\begin{cases} \alpha x + y + z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ x + y + \alpha z = 1 \end{cases}$

8. Classifique os seguintes sistemas de equações lineares em termos dos parâmetros reais $\alpha$ e $\beta$. Nos casos em que existirem soluções, determine-as.

**(i)** $\begin{cases} x + 4y + 3z = 10 \\ 2x + 7y - 2z = 10 \\ x + 5y + \alpha z = \beta \end{cases}$ **(ii)** $\begin{cases} \alpha x + y - z + \alpha w = 0 \\ x - 2y + 2z + w = 1 \\ x - y + z + (\alpha + 1)\, w = \beta \end{cases}$

9. Classifique em função dos parâmetros reais $\alpha$ e $\beta$ o seguinte sistema de equações lineares (nas variáveis $x, y$, $z$ e $w$). Nos casos em que existirem soluções, determine-as.

$$\begin{cases} 2z + \alpha w = \beta \\ x + y + z + 3w = 1 \\ 2x + 2y + z + w = 2 \\ x + y + 3z + 14w = 4 \end{cases}$$

10. Para cada parâmetro real $\alpha$, considere o sistema de equações lineares de variáveis reais cuja matriz aumentada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 & -4 \\ \alpha & 2\alpha & 3 & 0 \end{array}\right].$$

**(i)** Determine os valores de $\alpha$ para os quais o sistema anterior é possível e determinado.

**(ii)** Para $\alpha = 1$, determine a solução geral do sistema de equações lineares correspondente.

11. Para cada parâmetro real $\alpha$, considere o sistema de equações lineares de variáveis reais cuja matriz aumentada é dada por:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & \alpha & 0 \\ 2 & 1 & \alpha & -1 \\ 1 & -\alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 3\alpha & -1 \end{array}\right].$$

Determine (se existirem), justificando, os valores de $\alpha$ para os quais o sistema anterior é possível e determinado, e calcule a solução geral do sistema correspondente a $\alpha = -\dfrac{1}{3}$.

12. Determine um sistema de equações lineares cujo conjunto de soluções seja:

**(i)** $S = \{(1,1,1)\}$ **(ii)** $S = \{(t, 1-2t, 1) : t \in \mathbb{R}\}$

**(iii)** $S = \{(1+t, 1-t) : t \in \mathbb{R}\}$ **(iv)** $S = \{(3t, 2t, t) : t \in \mathbb{R}\}$

**(v)** $S = \{(3t-s, t+2s-1, s-2t+1) : s, t \in \mathbb{R}\}$

**(vi)** $S = \{(1-s, s-t, 2s, t-1) : s, t \in \mathbb{R}\}$ **(vii)** $S = \varnothing$

13. Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, determine todos os $u \neq \mathbf{0}$ tais que $Au = 5u$.

14. Determine todas as matrizes reais $2 \times 2$ que comutam com a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

15. Pretende-se arrumar livros em caixas. Ao colocar 7 livros em cada caixa, fica um livro de fora. Ao colocar 8 livros por caixa, há uma caixa que só tem 1 livro. Quantos livros se pretende arrumar? Quantas caixas existem?

16. **(i)** Determine os coeficientes $a, b, c$ e $d$ da função polinomial $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, cujo gráfico passa pelos pontos $P_1 = (0, 10), P_2 = (1, 7), P_3 = (3, -11)$ e $P_4 = (4, -14)$.

**(ii)** Determine os coeficientes $a, b$ e $c$ da equação da circunferência $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, que passa pelos pontos $P_1 = (-2, 7), P_2 = (-4, 5)$ e $P_3 = (4, -3)$.

17. Efectue, sempre que possível, as seguintes operações.

**(i)** $\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -\pi \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & 2 & 4 \\ -3 & \sqrt{5} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

**(iv)** $2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ **(v)** $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix} -2 & \sqrt{3} & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

**(vii)** $\begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -\frac{1}{2} & 2 \end{bmatrix}$ **(viii)** $\left( \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} 2 \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -3 \end{bmatrix} \right)^T$

**(ix)** $$\left(2\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{8}{9} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{5}{3} & 1 & \frac{5}{2} \end{bmatrix}\right)^T$$

**(x)** $$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 6 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ -\frac{1}{3} & -3 \end{bmatrix}$$ **(xi)** $$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ -\frac{1}{3} & -3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 6 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

18. Escreva a matriz $A = (a_{ij})_{4\times 4} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ em cada um dos seguintes casos:

**(i)** $a_{ij} = j^2(-1)^{i+j}$ **(ii)** $a_{ij} = \begin{cases} -a_{ji} & \text{para todo } i, j \\ j & \text{se } j > i \end{cases}$

**(iii)** $a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{se } i > j \\ \frac{1}{i+j-1} & \text{caso contrário,} \end{cases}$ **(iv)** $a_{ij} = \begin{cases} i & \text{se } i = j \\ -j & \text{se } j = i+1 \\ i - j & \text{caso contrário,} \end{cases}$

19. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Em função do parâmetro $\alpha$, calcule a característica e a nulidade das seguintes matrizes. Em cada alínea, indique ainda (se existirem), justificando, os valores de $\alpha$ para os quais essas matrizes são invertíveis.

**(i)** $$\begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2-\alpha & -1 \end{bmatrix}$$ **(ii)** $$\begin{bmatrix} 2 & \alpha^2 & -\alpha \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha^2-1 & \alpha+1 \end{bmatrix}$$ **(iii)** $$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha^2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

20. Existem 16 matrizes $2 \times 2$ só com 0 e 1 nas respectivas entradas. Quantas são invertíveis?

21. Verifique se a matriz $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $a_{ij} = 3i + 2j$, para todo $i, j = 1, 2$, é simétrica.

22. Determine as características e as nulidades das seguintes matrizes reais, identificando os respectivos pivots.

**(i)** $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$ **(ii)** $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$$ **(iii)** $$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

**(iv)** $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$ **(v)** $$\begin{bmatrix} 2 & 10 & -6 & 8 & -4 \\ -1 & -5 & 3 & -4 & 2 \\ -2 & -10 & 6 & -8 & 4 \end{bmatrix}$$

**(vi)** $$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ **(vii)** $$\begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$ **(viii)** $$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

**(ix)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ **(x)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 7 & -1 & 9 & 8 \\ 3 & 3 & -2 & 4 & -6 \end{bmatrix}$

23. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Em função do parâmetro $\alpha$, calcule a característica e a nulidade das seguintes matrizes. Em cada alínea, indique ainda (se existirem), justificando, os valores de $\alpha$ para os quais essas matrizes são invertíveis.

**(i)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & \alpha & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & \alpha & 0 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 \\ 1 & -1 & \alpha^3 & 0 \\ -1 & 1 & -\alpha & \alpha^2-1 \end{bmatrix}$

24. Determine (se existirem) as inversas das seguintes matrizes.

**(i)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 1 & 8 & 1 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$, com $k \neq 0$

**(iv)** $\begin{bmatrix} \frac{5}{13} & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & -\frac{8}{13} \\ \frac{2}{13} & -\frac{7}{13} & \frac{6}{13} & \frac{2}{13} \\ \frac{2}{13} & \frac{6}{13} & -\frac{7}{13} & \frac{2}{13} \\ -\frac{8}{13} & \frac{2}{13} & \frac{2}{13} & \frac{5}{13} \end{bmatrix}$ **(v)** $\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

25. Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine a matriz $A$ tal que $I - A^T B = B^2$.

26. Determine a matriz invertível $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $A^{-1}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^T$.

27. Sejam $A, B, X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes invertíveis tais que $(AB)^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$. Em cada um dos seguintes casos, determine a matriz $X$ que satisfaz a equação

**(i)** $AXB + AB = \mathbf{0}$ **(ii)** $BXA - A^{-1}B^{-1} = \mathbf{0}$

28. Determine a matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} A^T + (\operatorname{tr} I)\, I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

29. Determine a matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\left(A\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right)^T = 3\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2$.

30. Determine a matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\left(2I - (3A^{-1})^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$.

31. Determine a matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\left(A^T + 4I\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

32. Determine a matriz $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}^T A \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = I$.

33. Determine a matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} (2I - A) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

34. Determine a matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $A^T - I = \left( \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} - I \right)^{-1}$.

35. Determine $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $\left( \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} A \right)^T + 2I = \left( \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 - 2 \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \right)^{-1}$.

36. Seja $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine a matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $B^T A B + I = 2I$.

37. **(i)** Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^k = \mathbf{0}$ para algum $k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Verifique que $(I - A)^{-1} = I + A + ... + A^{k-1}$

**(ii)** Calcule $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$.

38. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 5 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$. **(i)** Verifique que $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **(ii)** Calcule $(I - A)\left(I + A + A^2\right)$.

39. Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha & \alpha \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2+\alpha & -2 \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

**a)** Determine a característica de $A_\alpha$ em função do parâmetro $\alpha$ e diga quais são os valores de $\alpha$ para os quais $A_\alpha$ é invertível.

**b)** Determine a inversa da matriz $A_0$ $(\alpha = 0)$.

**c)** Determine a solução do sistema $A_0 X = B$, em que $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$.

40. Seja $B_{a,b} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a & 1 \\ 2 & 2 & 0 & a \\ 0 & 0 & a & b \\ 3 & 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

**(i)** Determine a característica e a nulidade de $B_{a,b}$ em função de $a$ e $b$.

**(ii)** Para $a = 1$ e $b = 0$ calcule a matriz inversa da matriz $B_{1,0}$, isto é, $(B_{1,0})^{-1}$.

**(iii)** Determine a solução geral do sistema linear $B_{1,0}X = C$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T$.

**(iv)** Para $b = 1$, determine a solução geral do sistema linear $B_{a,1}X = D$, em que $D$ é o simétrico da $3^a$ coluna de $B_{a,1}$.

41. Seja $A_{\lambda,\mu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda & \lambda^2+\mu & \lambda\mu \\ 0 & 1 & \lambda & \mu \\ 1 & \lambda & \lambda^2+\mu & \lambda+\lambda\mu \end{bmatrix}$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

**(i)** Determine a característica e a nulidade de $A_{\lambda,\mu}$ em função de $\lambda$ e $\mu$.

**(ii)** Determine os valores dos parâmetros $\lambda$ e $\mu$ para os quais $A_{\lambda,\mu}$ é invertível.

42. Seja $A_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta & 2 \\ 2 & \beta & \beta^2 & 4 \\ -4 & 0 & -\beta^3 & -8 \\ \beta & 0 & \beta^2 & \beta^2 \end{bmatrix}$, com $\beta \in \mathbb{R}$.

**(i)** Determine a característica e a nulidade de $A_\beta$ em função do parâmetro $\beta$ e diga, justificando, quais são os valores de $\beta$ para os quais $A_\beta$ é invertível.

**(ii)** Para $\beta = 1$, determine a inversa da matriz $A_1$.

43. Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -\alpha^2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

**a)** Determine a característica e a nulidade de $A_\alpha$ em função do parâmetro $\alpha$.

**b)** Diga, justificando, quais são os valores de $\alpha$ para os quais $A_\alpha$ é invertível.

**c)** Para $\alpha = 1$, determine a solução geral do sistema de equações lineares $A_1X = \mathbf{0}$.

**d)** Para $\alpha = 1$, determine a solução geral do sistema de equações lineares $A_1X = B$, onde $B$ é igual à $4^a$ coluna da matriz $A_1$.

44. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $Au = \mathbf{0}$ para qualquer $u \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$. Prove que $A = \mathbf{0}$.

45. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{R})$ matrizes não nulas. Determine a característica de $AB^T$. Justifique.

46. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $AB = A + B$. Mostre que $AB = BA$.

47. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $ABA = B$ e $BAB = A$. Mostre que $A^2 = B^2$.

48. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tais que $A^2 = A$, $B^2 = B$ e $(A+B)^2 = A + B$. Mostre que

$$AB = BA = \mathbf{0}.$$

49. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que

$$\mathrm{tr}(A^TA) = 0 \Leftrightarrow A = \mathbf{0}.$$