

I (T1+T2)

$$\mathbf{1)} [A | B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ \alpha^2 & 1 & 0 & 0 & \alpha^2 - \alpha - 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & -\alpha + 2 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 - \alpha^2 & 0 & 0 & -\alpha - 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -\alpha - 1 \end{array} \right].$$

O sistema é impossível se e só se $\text{car } A < \text{car } [A | B]$ se e só se $\alpha = 1$. Se $\alpha = 0$ então a solução geral é: $\{(2, -1, -1 - s, s) : s \in \mathbb{R}\}$.

$$\mathbf{2)} \left(A \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)^T = 3 \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 \Leftrightarrow A = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 9 & -4 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{3)} (x + y - z = 0 \text{ e } x + z - w = 0) \Leftrightarrow (x = -y + z \text{ e } w = -y + 2z). \text{ Logo } U = L(\{(-1, 1, 0, -1), (1, 0, 1, 2)\})$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & x \\ 3 & 6 & -3 & y \\ 1 & 2 & -1 & z \\ -1 & -2 & 1 & w \end{array} \right] \xrightarrow{\dots} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & x \\ 0 & 9 & -18 & -3x + y \\ 0 & 3 & -6 & -x + z \\ 0 & -3 & 6 & x + w \end{array} \right] \xrightarrow{\dots} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 5 & x \\ 0 & 3 & -6 & -x + z \\ 0 & 0 & 0 & y - 3z \\ 0 & 0 & 0 & z + w \end{array} \right],$$

Logo $\{(1, 3, 1, -1), (-1, 6, 2, -2)\}$ é uma base de V , $\dim V = 2$ e

$$V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : y - 3z = 0 \text{ e } z + w = 0\}.$$

$$U \cap V = \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = L(\{(2, -3, -1, 1)\}).$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} -1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{\dots} \left[\begin{array}{ccccc} -1 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \text{ logo}$$

$\{(-1, 1, 0, -1), (2, -3, -1, 1), (1, 3, 1, -1)\}$ é uma base de $U + V$ e inclui o vector $(2, -3, -1, 1) \in U \cap V$.

$$\mathbf{4)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ -1 & 1 & 1 & y \\ 0 & 1 & 0 & z \end{array} \right] \xrightarrow{\dots} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & 0 & z \end{array} \right], \text{ logo}$$

$$(x, y, z) = (x+z)(1, -1, 0) + z(-1, 1, 1) + (x+y)(0, 1, 0)$$

e como T é linear,

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= (x+z)T(1, -1, 0) + zT(-1, 1, 1) + (x+y)T(0, 1, 0) = \\ &= (x+z)(-1, 1, -1) + z(1, 0, 1) + (x+y)(1, 0, 1) = (y, x+z, y). \end{aligned}$$

$$\mathbf{5) a)} \mathcal{N} \left(\left[\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \right) = L(\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}), \text{ logo}$$

$$\mathcal{N}(T_2) = L(\{(-1)(1-t) + 1 + t^2, t\}) = L(\{t + t^2, t\})$$

e como $\{t + t^2, t\}$ é linearmente independente, é então uma base para $\mathcal{N}(T_2)$.

$$T_1(x, y, z) = x - z + (x - z)t^2 = x(1 + t^2) + z(-1 - t^2),$$

logo $\mathcal{I}(T_1) = L(\{1 + t^2\})$ e assim $\mathcal{I}(T_1) \neq \mathcal{P}_2$ pelo que T_1 não é sobrejectiva.

b) Com $\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_2} = \{1, t, t^2\}$, tem-se

$$M(T_2; \mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_2}; \mathcal{B}_c^3) = M(T_2; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_c^3) S_{\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_2} \rightarrow \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$M(T_1 \circ T_2; \mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_2}; \mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_2}) = M(T_1; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_2}) M(T_2; \mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_2}; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$(T_1 \circ T_2)(a_0 + a_1 t + a_2 t^2) = a_0 + a_0 t^2$$

e

$$(T_1 \circ T_2)(1 + t^2) = 1 + t^2.$$

Por outro lado $\mathcal{N}(T_1 \circ T_2) = L(\{t, t^2\})$. Assim $\mathcal{B} = \{t, t^2, 1 + t^2\}$ é uma base de $\mathcal{P}_2$ relativamente à qual

$$M(T_1 \circ T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6) Como $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ e $\text{car } A = n$, $\text{nul } A = n - \text{car } A = 0$. Logo $\mathcal{N}(AB) = \mathcal{N}(B)$ uma vez que $\mathcal{N}(B) \subset \mathcal{N}(AB)$ ($u \in \mathcal{N}(B)$, logo $Bu = \mathbf{0}$ e assim $(AB)u = A(Bu) = \mathbf{0}$, pelo que $u \in \mathcal{N}(AB)$) e $\mathcal{N}(AB) \subset \mathcal{N}(B)$ ($u \in \mathcal{N}(AB)$, então $A(Bu) = (AB)u = \mathbf{0}$ e logo $Bu \in \mathcal{N}(A) = \{\mathbf{0}\}$ e assim $u \in \mathcal{N}(B)$). Deste modo,

$$\text{car}(AB) = m - \text{nul}(AB) = m - \text{nul}(B) = \text{car } B = n.$$

II (T3)

1)

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 4 & \sqrt{2} \\ 0 & 5 & -1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 6 & 3 & 0 & 4 & \sqrt{5} \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 4 & \sqrt{2} \\ 6 & 3 & 4 & \sqrt{5} \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 4 & \sqrt{2} \\ 6 & 3 & 4 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 4 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

logo

$$\det((\det A) A^{-3}) = (\det A)^5 \det(A^{-3}) = (\det A)^5 \frac{1}{(\det A)^3} = (\det A)^2 = 4$$

2) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2$. Logo os valores próprios de A são: 0 e 1. Como

$$\mathcal{N}(A) = L(\{(0, 0, 1)\}) \quad \text{e} \quad \mathcal{N}(A - I) = L(\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\})$$

então poderá ter-se a seguinte base de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A : $\{(0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1)\}$. Logo, por exemplo para

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

tem-se $D = PAP^{-1}$.

3) $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 2x - w = 0 \quad \text{e} \quad 2x - z = 0\} = L(\{(1, 0, 2, 2), (0, 1, 0, 0)\})$. O conjunto $\{(1, 0, 2, 2), (0, 1, 0, 0)\}$ é uma base ortogonal de U , logo

$$\begin{aligned} d((1, 2, 1, 2), U^\perp) &= \|P_U(1, 2, 1, 2)\| = \left\| \text{proj}_{(1,0,2,2)}(1, 2, 1, 2) + \text{proj}_{(0,1,0,0)}(1, 2, 1, 2) \right\| = \\ &= \left\| \frac{7}{9}(1, 0, 2, 2) + 2(0, 1, 0, 0) \right\| = \frac{1}{3}\sqrt{85}. \end{aligned}$$

4) $\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(1+\lambda)(2-\lambda)$. Logo os valores próprios de A são: 0, -1 e 2. Como A é

simétrica, então A é ortogonalmente diagonalizável. Como

$$\mathcal{N}(A) = L(\{(-1, 1, 0)\}), \quad \mathcal{N}(A + I) = L(\{(-1, -1, 1)\}) \quad \text{e} \quad \mathcal{N}(A - 2I) = L(\{(1, 1, 2)\})$$

então poderá ter-se a seguinte base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A :

$$\{(-1, 1, 0), (-1, -1, 1), (1, 1, 2)\}.$$

5) Tem-se

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a + d = 0 \right\} = L \left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right)$$

e

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = L \left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right).$$

Logo

$$\begin{aligned} & \{X \in V : \langle X, Y \rangle = 0, \text{ para todo } Y \in W\} = \\ & \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} : \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 = \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \right\} = \\ & \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} : \text{tr} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^T \right) = 0 = \text{tr} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T \right) \right\} = \\ & \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} : 6a = 0 \quad \text{e} \quad 4b + 2c = 0 \right\} = L \left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right). \end{aligned}$$

Logo $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base ortogonal de $\{X \in V : \langle X, Y \rangle = 0, \text{ para todo } Y \in W\}$. Como

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\text{tr} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^T \right)} = \sqrt{12}$$

então

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base ortonormada para $\{X \in V : \langle X, Y \rangle = 0, \text{ para todo } Y \in W\}$.

6) Seja λ um qualquer valor próprio de A e seja $u \neq \mathbf{0}$ um vector próprio associado ao valor próprio λ . Tem-se $(A - \lambda I)u = \mathbf{0}$ e assim, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$

$$(\lambda - a_{kk})u_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj}u_j$$

Seja $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $|u_i| \geq |u_j|, \forall j \in \{1, \dots, n\}$. Logo $(\lambda - a_{ii})u_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}u_j$. Deste modo

$$|\lambda - a_{ii}| |u_i| = |(\lambda - a_{ii})u_i| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}u_j \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| |u_j| \leq |u_i| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|$$

ou seja, como $|u_i| \neq 0$,

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|.$$