IST - LEGM e MEC - Álgebra Linear - 1^o semestre 2018/2019

Produtos internos (resolução)

1. (i) Consideremos a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2,$$

com $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Por exemplo

$$\langle (1,1), (1,0) + (1,0) \rangle = \langle (1,1), (2,0) \rangle = 4 \neq 2 = \langle (1,1), (1,0) \rangle + \langle (1,1), (1,0) \rangle .$$

Logo, esta aplicação $\langle , \rangle$ não é um produto interno, uma vez que a condição de linearidade não é verificada.

(ii) Consideremos a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 3 x_2 y_2,$$

com $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Tem-se

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

e como $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ é simétrica e os seus valores próprios ($\sqrt{2} + 2$ e $2 - \sqrt{2}$) são todos positivos, logo, a aplicação $\langle , \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Resolução alternativa: Para todos os $(x_1, x_2), (x_1', x_2'), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle &= x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 3 x_2 y_2 = \\ &= y_1 x_1 - y_1 x_2 - y_2 x_1 + 3 y_2 x_2 = \\ &= y_1 x_1 - y_2 x_1 - y_1 x_2 + 3 y_2 x_2 = \\ &= \langle (y_1, y_2), (x_1, x_2) \rangle . \end{aligned}$$

$$\left\langle (x_1, x_2) + (x_1', x_2'), (y_1, y_2) \right\rangle = \left\langle (x_1 + x_1', x_2 + x_2'), (y_1, y_2) \right\rangle =$$

$$\begin{aligned} &= (x_1 + x_1')y_1 - (x_2 + x_2')y_1 - (x_1 + x_1')y_2 + 3(x_2 + x_2')y_2 = \\ &= x_1 y_1 + x_1' y_1 - x_2 y_1 - x_2' y_1 - x_1 y_2 - x_1' y_2 + 3 x_2 y_2 + 3 x_2' y_2 = \\ &= x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 3 x_2 y_2 + x_1' y_1 - x_2' y_1 - x_1' y_2 + 3 x_2' y_2 = \\ &= \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle + \left\langle (x_1', x_2'), (y_1, y_2) \right\rangle . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \lambda(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle &= \langle (\lambda x_1,\lambda x_2),(y_1,y_2)\rangle = \\ &= \lambda x_1y_1 - \lambda x_2 y_1 - \lambda x_1 y_2 + 3\lambda x_2 y_2 = \\ &= \lambda(x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_2) = \\ &= \lambda \langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle .\end{aligned}$$

$$\langle (x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = (x_1-x_2)^2 + (\sqrt{2}x_2)^2 \geq 0$$

e

$$\begin{aligned}\langle (x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle &= 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2 = 0 \ \text{ e } \ \sqrt{2}x_2 = 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x_1 = x_2 \ \text{ e } \ x_2 = 0) \\ &\Leftrightarrow (x_1 = 0 \ \text{ e } \ x_2 = 0).\end{aligned}$$

Logo:

$$\langle (x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle > 0,$$

para todo o $(x_1,x_2) \neq (0,0)$.

Assim, a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_2$$

é um produto interno.

(iii) Consideremos a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = -2x_1y_1 + 3x_2y_2,$$

com $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Tem-se

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Como os valores próprios de $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ não são todos positivos (-2 e 3), logo, a aplicação $\langle , \rangle$ não define um produto interno em $\mathbb{R}^2$, uma vez que a condição de positividade não é satisfeita.

Resolução alternativa: Vejamos que a condição de positividade não é satisfeita.

$$\langle (x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle = 0 \Leftrightarrow -2x_1^2 + 3x_2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\,|x_2|\,.$$

Logo, por exemplo tem-se:

$$\left\langle \left(\sqrt{\frac{3}{2}},1\right),\left(\sqrt{\frac{3}{2}},1\right)\right\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \left(\sqrt{\frac{3}{2}},1\right) \neq (0,0).$$

Assim, a condição:

$$\langle (x_1,x_2),(x_1,x_2)\rangle > 0, \ \forall (x_1,x_2) \neq (0,0)$$

não é satisfeita. Logo, a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = -2x_1y_1 + 3x_2y_2$$

não é um produto interno.

2. **(i)** Consideremos a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3,$$

com $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

Tem-se

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

e como $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica e os seus valores próprios (1) são todos positivos, logo, a aplicação $\langle , \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Resolução alternativa: Para todos os $(x_1, x_2, x_3), (x_1', x_2', x_3')(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \\ &= y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = \\ &= \langle (y_1, y_2, y_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle . \end{aligned}$$

$$\left\langle (x_1, x_2, x_3) + (x_1', x_2', x_3'), (y_1, y_2, y_3) \right\rangle =$$

$$\begin{aligned} &= \left\langle (x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3'), (y_1, y_2, y_3) \right\rangle = \\ &= (x_1 + x_1')y_1 + (x_2 + x_2')y_2 + (x_3 + x_3')y_3 = \\ &= x_1y_1 + x_1'y_1 + x_2y_2 + x_2'y_2 + x_3y_3 + x_3'y_3 = \\ &= x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_1'y_1 + x_2'y_2 + x_3'y_3 = \\ &= \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle + \left\langle (x_1', x_2', x_3'), (y_1, y_2, y_3) \right\rangle . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \lambda(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle &= \langle \lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = \\ &= \lambda x_1y_1 + \lambda x_2y_2 + \lambda x_3y_3 = \\ &= \lambda(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) = \\ &= \lambda \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle . \end{aligned}$$

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \geq 0$$

e
$$\langle (x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\rangle = 0 \Leftrightarrow (x_1 = 0 \ \text{ e } \ x_2 = 0 \ \text{ e } \ x_3 = 0).$$
Logo:
$$\langle (x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\rangle > 0, \ \forall (x_1,x_2,x_3) \neq (0,0,0).$$
Assim, a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por
$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$
é um produto interno, o chamado produto interno usual de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Consideremos a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por
$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_2 - x_2y_1.$$

Tem-se
$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$
e como $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ não é simétrica, logo, a aplicação $\langle , \rangle$ não define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Resolução alternativa: Por exemplo
$$\langle (1,1,1),(1,0,0)\rangle = -1 \neq 1 = \langle (1,0,0),(1,1,1)\rangle .$$
Logo, esta aplicação $\langle , \rangle$ não é um produto interno, uma vez que a condição de simetria não é verificada.

(iii) Consideremos a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por
$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3,$$
com $(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$.

Tem-se
$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$
e como $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica e os seus valores próprios
$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda)-1\right] = (2-\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda+1\right) =$$
$$= (2-\lambda)\left(\lambda-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\lambda-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$$

$(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}, 2$) são todos positivos, logo, a aplicação $\langle , \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Resolução alternativa: Para todos os $(x_1, x_2, x_3), (x_1', x_2', x_3')(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\begin{aligned}
\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle &= 2x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 = \\
&= 2y_1x_1 + y_3x_1 + y_1x_3 + 2y_2x_2 + y_3x_3 = \\
&= \langle (y_1, y_2, y_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle .
\end{aligned}$$

$$\left\langle (x_1, x_2, x_3) + (x_1', x_2', x_3'), (y_1, y_2, y_3) \right\rangle = \left\langle (x_1 + x_1', x_2 + x_2', x_3 + x_3'), (y_1, y_2, y_3) \right\rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= 2(x_1 + x_1')y_1 + (x_1 + x_1')y_3 + (x_3 + x_3')y_1 + 2(x_2 + x_2')y_2 + (x_3 + x_3')y_3 = \\
&= 2x_1y_1 + 2x_1'y_1 + x_1y_3 + x_1'y_3 + x_3y_1 + x_3'y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2'y_2 + x_3y_3 + x_3'y_3 = \\
&= 2x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 + 2x_1'y_1 + x_1'y_3 + x_3'y_1 + 2x_2'y_2 + x_3'y_3 = \\
&= \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle + \left\langle (x_1', x_2', x_3'), (y_1, y_2, y_3) \right\rangle .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \lambda(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle &= \langle \lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = \\
&= 2\lambda x_1y_1 + \lambda x_1y_3 + \lambda x_3y_1 + 2\lambda x_2y_2 + \lambda x_3y_3 = \\
&= \lambda(2x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3) = \\
&= \lambda \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle &= 2x_1^2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + x_3^2 = \\
&= x_1^2 + (x_1 + x_3)^2 + \left(\sqrt{2}x_2\right)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle &= 0 \Leftrightarrow (x_1 = 0 \ \text{ e } \ x_1 + x_3 = 0 \ \text{ e } \ \sqrt{2}x_2 = 0) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow (x_1 = 0 \ \text{ e } \ x_2 = 0 \ \text{ e } \ x_3 = 0).
\end{aligned}$$

Logo:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle > 0, \ \forall (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0).$$

Assim, a aplicação $\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_3 + x_3y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3$$

é um produto interno.

3. Considere os vectores $u = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ e $v = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)$. Considere o produto interno definido em $\mathbb{R}^2$ por

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 3x_1y_1 + 2x_2y_2.$$

Tem-se

$$\langle u,v\rangle=\left\langle\left(\frac{1}{\sqrt{5}},-\frac{1}{\sqrt{5}}\right),\left(\frac{2}{\sqrt{30}},\frac{3}{\sqrt{30}}\right)\right\rangle=3\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{2}{\sqrt{30}}+2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\frac{3}{\sqrt{30}}=0$$

e

$$\langle u,u\rangle=3\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=1 \quad \text{e} \quad \langle v,v\rangle=3\left(\frac{2}{\sqrt{30}}\right)^2+2\left(\frac{3}{\sqrt{30}}\right)^2=1.$$

Logo, o conjunto $\{u,v\}$ é ortonormado relativamente ao produto interno anterior.

No entanto, relativamente ao produto interno usual $\langle,\rangle'$ definido em $\mathbb{R}^2$:

$$\langle(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle'=x_1y_1+x_2y_2,$$

tem-se

$$\langle u,v\rangle'=-\frac{1}{\sqrt{150}},\quad \langle u,u\rangle'=\frac{2}{5}\quad \text{e}\quad \langle v,v\rangle'=\frac{13}{30}.$$

Logo, o conjunto $\{u,v\}$ não é ortonormado relativamente ao produto interno usual definido em $\mathbb{R}^2$.

4. Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual.

Seja $U=L\left(\{(1,0,0,0),(1,0,0,1)\}\right)$. Logo, o subespaço de $\mathbb{R}^4$ ortogonal a U é dado por:

$$U^\perp=\left\{\begin{array}{c}(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4:\langle(x,y,z,w),(1,0,0,0)\rangle=0 \quad \text{e}\\ \langle(x,y,z,w),(1,0,0,1)\rangle=0\end{array}\right\}=$$

$$=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&1\end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4:x=0\ \text{ e }\ w=0\right\}=\left\{(0,y,z,0)\in\mathbb{R}^4:y,z\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=L\left(\{(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}$ é independente e gera $U^\perp$ então é uma base de $U^\perp$ e tem-se

$$\mathbb{R}^4=U\oplus U^\perp=$$

$$=L\left(\{(1,0,0,0),(1,0,0,1)\}\right)\oplus L\left(\{(0,1,0,0),(0,0,1,0)\}\right).$$

5. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno definido por:

$$\langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2+x_3y_3,$$

isto é, por

$$\langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle=\begin{bmatrix}x_1&x_2&x_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}.$$

(i) Seja $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Tem-se

$$\|u\| = \sqrt{\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle} = \sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2}.$$

(ii) Considere os vectores $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$ e $u_3 = (0, 0, 1)$. Tem-se

$$\arccos \frac{\langle u_1, u_2 \rangle}{\|u_1\| \|u_2\|} = \arccos \frac{0}{1.1} = \frac{\pi}{2},$$

$$\arccos \frac{\langle u_2, u_3 \rangle}{\|u_2\| \|u_3\|} = \arccos \frac{0}{1.1} = \frac{\pi}{2}$$

e

$$\arccos \frac{\langle u_1, u_3 \rangle}{\|u_1\| \|u_3\|} = \arccos \frac{0}{1.1} = \frac{\pi}{2}$$

(iii) Atendendo a que

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle u_2, u_3 \rangle = \langle u_1, u_3 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \|u_1\| = \|u_2\| = \|u_3\| = 1$$

então o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$.

Seja $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Tem-se

$$\begin{aligned} u &= \langle u, u_1 \rangle u_1 + \langle u, u_2 \rangle u_2 + \langle u, u_3 \rangle u_3 = \\ &= (x_1 + x_2) u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3. \end{aligned}$$

Logo, as coordenadas de um vector $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ em relação à base ortonormada $\{u_1, u_2, u_3\}$ são dadas por:

$$x_1 + x_2, \quad x_2 \quad \text{e} \quad x_3.$$

6. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Seja

$$U = L\left(\{(1, 0, -1, 0), (-1, 2, 0, 1), (2, 0, 2, 1)\}\right).$$

Determinemos a dimensão de U e uma base ortonormada para U. Tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$, com $v_1 = (1, 0, -1, 0), v_2 = (-1, 2, 0, 1)$ e $v_3 = (2, 0, 2, 1)$, é uma base de U e como tal $\dim U = 3$.

Sejam

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2 - \operatorname{proj}_{u_1} v_2 \quad \text{e} \quad u_3 = v_3 - \operatorname{proj}_{u_1} v_3 - \operatorname{proj}_{u_2} v_3.$$

Logo, o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$, com $u_1 = (1,0,-1,0)$,

$$u_2 = (-1,2,0,1) - \frac{-1}{2}(1,0,-1,0) = \left(-\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

e

$$\begin{aligned} u_3 &= (2,0,2,1) - \frac{0}{2}(1,0,-1,0) - \frac{-1}{11/2}\left(-\frac{1}{2}, 2, -\frac{1}{2}, 1\right) = \\ &= (2,0,2,1) + \frac{1}{11}(-1,4,-1,2) = \left(\frac{21}{11}, \frac{4}{11}, \frac{21}{11}, \frac{13}{11}\right) \end{aligned}$$

é uma base ortogonal de U. Uma base ortonormada para U:

$$\left\{\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}, \frac{u_3}{\|u_3\|}\right\} =$$

$$= \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(-\frac{\sqrt{22}}{22}, \frac{2\sqrt{22}}{11}, -\frac{\sqrt{22}}{22}, \frac{\sqrt{22}}{11}\right), \left(\frac{21}{\sqrt{1067}}, \frac{4}{\sqrt{1067}}, \frac{21}{\sqrt{1067}}, \frac{13}{\sqrt{1067}}\right)\right\}.$$

7. **(i)** O conjunto $\{(0,1,1), (0,0,1)\}$ gera U e é linearmente independente logo é uma base de U. Atendendo ao método de ortogonalização de Gram-Schmidt, uma base ortogonal para U é: $\{u_1, u_2\}$ em que $u_1 = (0,1,1)$ e

$$u_2 = (0,0,1) - \underset{(0,1,1)}{\mathrm{Proj}}(0,0,1) = (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1), (0,1,1)\rangle}{\|(0,1,1)\|^2}(0,1,1) =$$

$$= (0,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,1) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Assim uma base ortogonal para U é: $\left\{(0,1,1), \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}$.

Tem-se

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\right\} = \{(x,y,y) : x, y \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,0,0), (0,1,1)\}\right).$$

Atendendo a que $\langle (1,0,0), (0,1,1)\rangle = 0$, uma base ortonormada para V é:

$$\left\{\frac{(1,0,0)}{\|(1,0,0)\|}, \frac{(0,1,1)}{\|(0,1,1)\|}\right\} = \left\{(1,0,0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

(ii) Como

$$U^{\perp} = \left(L\left(\left\{(0,1,1), \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}\right)\right)^{\perp} = L\left(\{(1,0,0)\}\right),$$

uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores geradores de U é:

$$\left\{(1,0,0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

Como

$$V^\perp = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\right\}^\perp = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z), (0,1,-1)\rangle = 0\right\}^\perp =$$

$$= \left((L(\{(0,1,-1)\}))^\perp\right)^\perp = L(\{(0,1,-1)\}),$$

e atendendo à alínea anterior, uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores geradores de V é:

$$\left\{(1,0,0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

(iii) O elemento de U mais próximo de $(1,1,1)$ é:

$$P_U(1,1,1) = (1,1,1) - P_{U^\perp}(1,1,1) =$$

$$= (1,1,1) - \langle (1,1,1), (1,0,0)\rangle (1,0,0) = (0,1,1).$$

A distância entre $(1,1,1)$ e $V^\perp$ é:

$$d\left((1,1,1), V^\perp\right) = \|P_V(1,1,1)\| \underset{(1,1,1)\in V}{=} \|(1,1,1)\| = \sqrt{3}$$

8. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A.

(i) O conjunto $\{(1,0,2),(2,0,1)\}$ é uma base para $\mathcal{C}(A)$ pois gera $\mathcal{C}(A)$ e é linearmente independente.

O conjunto $\{(1,0,2),(2,0,1),(0,1,0)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$. Como $(2,0,1)$ e $(0,1,0)$ são ortogonais, basta aplicar Gram-Schmidt a $(1,0,2)$:

$$(1,0,2) - P_{(2,0,1)}(1,0,2) - P_{(0,1,0)}(1,0,2) =$$

$$= (1,0,2) - \frac{\langle (1,0,2),(2,0,1)\rangle}{\|(2,0,1)\|^2}(2,0,1) - \frac{\langle (1,0,2),(0,1,0)\rangle}{\|(0,1,0)\|^2}(0,1,0) =$$

$$= (1,0,2) - \frac{4}{5}(2,0,1) = \left(-\frac{3}{5}, 0, \frac{6}{5}\right).$$

Logo, o conjunto

$$\left\{\frac{(2,0,1)}{\|(2,0,1)\|},\frac{(0,1,0)}{\|(0,1,0)\|},\frac{\left(-\frac{3}{5},0,\frac{6}{5}\right)}{\left\|\left(-\frac{3}{5},0,\frac{6}{5}\right)\right\|}\right\}=\left\{\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},0,\frac{\sqrt{5}}{5}\right),(0,1,0),\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},0,\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores de $\mathcal{C}(A)$: $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},0,\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},0,\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)$.

(ii) O elemento de $\mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(1,1,1)$ é:

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{L}(A)}(1,1,1) &= (1,1,1)-P_{\mathcal{N}(A)}(1,1,1) \underset{\mathcal{N}(A)=L(\{(0,1,0)\})}{=} \\ &= (1,1,1)-\frac{\langle(1,1,1),(0,1,0)\rangle}{\|(0,1,0)\|^2}(0,1,0)= \\ &= (1,1,1)-(0,1,0)=(1,0,1). \end{aligned}$$

A distância entre $(1,1,1)$ e $\mathcal{N}(A)$ é:

$$d((1,1,1),\mathcal{N}(A))=\left\|P_{(\mathcal{N}(A))^\perp}(1,1,1)\right\|=\left\|P_{\mathcal{L}(A)}(1,1,1)\right\|=\|(1,0,1)\|=\sqrt{2}.$$

9. Seja $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A.

(i) Tem-se $(\mathcal{N}(A))^\perp=\mathcal{L}(A)$. O conjunto $\{(1,0,1),(0,2,0)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A)$ pois gera $\mathcal{N}(A)$ e é linearmente independente. Como $\langle(1,0,1),(0,2,0)\rangle=0$, os vectores $(1,0,1)$ e $(0,2,0)$ são ortogonais. Logo, o conjunto

$$\left\{\frac{(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|},\frac{(0,2,0)}{\|(0,2,0)\|}\right\}=\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),(0,1,0)\right\}$$

é uma base ortonormada para $(\mathcal{N}(A))^\perp$.

(ii) O conjunto $\{(1,0,1),(0,2,0)\}$ é uma base para $\mathcal{C}(A)$ pois gera $\mathcal{C}(A)$ e é linearmente independente.

O conjunto $\{(1,0,1),(0,2,0),(0,0,1)\}$ é uma base para $\mathbb{R}^3$. Como $(1,0,1)$ e $(0,2,0)$ são ortogonais, basta aplicar Gram-Schmidt a $(0,0,1)$:

$$(0,0,1)-P_{(1,0,1)}(0,0,1)-P_{(0,2,0)}(0,0,1)=$$

$$=(0,0,1)-\frac{\langle(0,0,1),(1,0,1)\rangle}{\|(1,0,1)\|^2}(1,0,1)-\frac{\langle(0,0,1),(0,2,0)\rangle}{\|(0,2,0)\|^2}(0,2,0)=$$

$$= (0,0,1) - \frac{1}{2}(1,0,1) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

Logo, o conjunto

$$\left\{ \frac{(1,0,1)}{\|(1,0,1)\|}, \frac{(0,2,0)}{\|(0,2,0)\|}, \frac{\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)}{\left\|\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)\right\|} \right\} = \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (0,1,0), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}$$

é uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores de $\mathcal{C}(A)$: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $(0,1,0)$.

(iii) O elemento de $\mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(1,2,3)$ é:

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{L}(A)}(1,2,3) &= (1,2,3) - P_{\mathcal{N}(A)}(1,2,3) \underset{\mathcal{N}(A)=L(\{(-1,0,1)\})}{=} \\ &= (1,2,3) - \frac{\langle (1,2,3), (-1,0,1) \rangle}{\|(-1,0,1)\|^2}(-1,0,1) = \\ &= (1,2,3) - (-1,0,1) = (2,2,2). \end{aligned}$$

A distância entre $(1,2,3)$ e $\mathcal{L}(A)^{\perp}$ é:

$$d\left((1,2,3), (\mathcal{L}(A))^{\perp}\right) = \left\| P_{\mathcal{L}(A)}(1,2,3) \right\| = \|(2,2,2)\| = 2\sqrt{3}.$$

10. Seja $U = L(\{(1,1,1,0), (0,1,1,1)\})$. Tem-se

$$U = L(\{(1,1,1,0),(0,1,1,1)\}) = \mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \left(\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)\right)^{\perp} =$$

$$= (L(\{(1,-1,0,1),(0,-1,1,0)\}))^{\perp} = \left(\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)\right)^{\perp} = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

Logo

$$U = \mathcal{N}(A), \text{ com } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolução alternativa: Seja $(x,y,z,w) \in U$. Então existem $x, y \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z,w) = x(1,1,1,0) + y(0,1,1,1).$$

Deste modo, o seguinte sistema (nas variáveis x e y) tem que ser possível e determinado:

$$\begin{cases} x = x \\ x + y = y \\ x + y = z \\ y = w \end{cases}$$

Considerando então a matriz aumentada deste sistema, tem-se:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \\ 0 & 1 & w \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 1 & z-x \\ 0 & 1 & w \end{array}\right]\right] \underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ -L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & z-y \\ 0 & 0 & x-y+w \end{array}\right]\right].$$

Logo, para que o sistema anterior seja possível e determinado, é preciso que se tenha $z-y=0$ e $x-y+w=0$.

Assim, $U=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x-y+w=0 \ \text{ e } \ z-y=0\}$, isto é,

$$U=\mathcal{N}(A), \ \text{ com } \ A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

11. Seja $\mathcal{B}=\{(1,0),(1,-1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Vamos definir um produto interno em $\mathbb{R}^2$ em relação ao qual a base $\mathcal{B}$ é ortonormada.

Tem-se a aplicação $\langle,\rangle:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ definida por

$$\langle u,v\rangle=\left([u]_{\mathcal{B}}\right)^T G_B\left([v]_{\mathcal{B}}\right), \quad \text{com } G_B=\begin{bmatrix} \langle v_1,v_1\rangle & \langle v_1,v_2\rangle \\ \langle v_2,v_1\rangle & \langle v_2,v_2\rangle \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \langle(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle &= \left(\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} y_1+y_2 \\ -y_2 \end{bmatrix}\right)= \\ &= x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2. \end{aligned}$$

Como

$$\langle(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

e a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ é simétrica, sendo os seus valores próprios ($\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{3}{2}$ e $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5}$) positivos, então a expressão

$$\langle(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+2x_2y_2$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^2$. Além disso, é fácil verificar que para este produto interno a base $\mathcal{B}=\{(1,0),(1,-1)\}$ é ortonormada:

$$\langle(1,0),(1,-1)\rangle=0 \ \text{ e } \ \langle(1,0),(1,0)\rangle=\langle(1,-1),(1,-1)\rangle=1.$$

12. Considere a aplicação $\langle,\rangle:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por

$$\langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle=x_1y_1-x_1y_2-x_2y_1+4x_2y_2+x_3y_3.$$

(i) Tem-se

$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}.$$

Como $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é simétrica e os seus valores próprios ($\frac{5+\sqrt{13}}{2}$ e $\frac{5-\sqrt{13}}{2}$) são todos positivos, logo, a aplicação $\langle , \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

(ii) Seja $V = L(\{(3,4,0)\}) \subset \mathbb{R}^3$. Uma base ortonormada para V:

$$\left\{ \frac{(3,4,0)}{\|(3,4,0)\|} \right\} = \left\{ \frac{(3,4,0)}{7} \right\} = \left\{ \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0 \right) \right\}$$

O ponto de V mais próximo de $(0,1,0)$ é

$$P_V(0,1,0) = \left\langle (0,1,0), \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0 \right) \right\rangle \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0 \right) = \frac{13}{7} \left(\frac{3}{7}, \frac{4}{7}, 0 \right) = \left(\frac{39}{49}, \frac{52}{49}, 0 \right).$$

Nota. Em alternativa, como $\dim V = 1$,

$$P_V(0,1,0) = \mathrm{proj}_{(3,4,0)}(0,1,0) = \frac{\langle (0,1,0),(3,4,0)\rangle}{\|(3,4,0)\|^2}(3,4,0) = \frac{13}{49}(3,4,0) = \left(\frac{39}{49}, \frac{52}{49}, 0 \right).$$

(iii) Tem-se

$$\begin{aligned} V^\perp &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z),(3,4,0)\rangle = 0 \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 4x - 3y + 16y = 0 \right\} = \\ &= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 13y = 0 \right\} = \\ &= \left\{ (13y,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y,z \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= L(\{(13,1,0),(0,0,1)\}). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{v_1, v_2\}$, com $v_1 = (13,1,0)$ e $v_2 = (0,0,1)$, é independente e gera $V^\perp$ então é uma base de $V^\perp$. Sejam

$$u_1 = v_1 \quad \text{e} \quad u_2 = v_2 - \mathrm{proj}_{u_1} v_2.$$

Logo, o conjunto $\{u_1, u_2\}$, com $u_1 = (13,1,0)$ e $u_2 = (0,0,1) - 0(13,1,0) = (0,0,1)$, é uma base ortogonal de $V^\perp$.

13. Consideremos em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual. Seja $U = L\left(\left\{ (0,1,0), \left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5} \right) \right\} \right)$. Tem-se

$$U^\perp = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & -3/5 \end{bmatrix} \right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \right) = L(\{(3,0,4)\}).$$

Logo,

$$P_{U^\perp}(1,2,3) = \frac{\langle (1,2,3),(3,0,4)\rangle}{\|(3,0,4)\|^2}(3,0,4) = \left(\frac{9}{5}, 0, \frac{12}{5}\right)$$

e assim

$$P_U(1,2,3) = (1,2,3) - P_{U^\perp}(1,2,3) = (1,2,3) - \left(\frac{9}{5}, 0, \frac{12}{5}\right) = \left(-\frac{4}{5}, 2, \frac{3}{5}\right).$$

Deste modo,

$$(1,2,3) = \left(-\frac{4}{5}, 2, \frac{3}{5}\right) + \left(\frac{9}{5}, 0, \frac{12}{5}\right),$$

com $\left(-\frac{4}{5}, 2, \frac{3}{5}\right) \in U$ e $\left(\frac{9}{5}, 0, \frac{12}{5}\right) \in U^\perp$.

14. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual.
(i) Seja $U = L\left(\{(1,0,0,0),(1,1,0,1)\}\right)$. Logo,

$$U^\perp = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x,y,z,w),(1,0,0,0)\rangle = 0 \text{ e } \langle (x,y,z,w),(1,1,0,1)\rangle = 0\right\}.$$

Tem-se então:

$$\begin{cases} x = 0 \\ \\ x + y + w = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ y = -w. \end{cases}$$

Logo,

$$U^\perp = \left\{(0,-w,z,w) \in \mathbb{R}^4 : z,w \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\{(0,-1,0,1),(0,0,1,0)\}\right).$$

Como

$$\langle (0,-1,0,1),(0,0,1,0)\rangle = 0$$

então o conjunto $\{(0,-1,0,1),(0,0,1,0)\}$ é uma base ortogonal de $U^\perp$.

(ii) Seja $U = L\left(\{(1,0,1,1)\}\right)$. Logo,

$$U^\perp = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \langle (x,y,z,w),(1,0,1,1)\rangle = 0\right\}.$$

Tem-se então:

$$x + z + w = 0 \Leftrightarrow x = -z - w.$$

Logo,

$$U^\perp = \left\{(-z-w,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y,z,w \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\{(0,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}\right),$$

pois

$$(-z-w,y,z,w) = y(0,1,0,0) + z(-1,0,1,0) + w(-1,0,0,1).$$

Como o conjunto $\{(0,1,0,0),(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}$ é independente (basta colocar esses três vectores como linhas ou como colunas de uma matriz e aplicar de seguida o método de eliminação de Gauss obtendo-se uma matriz em escada de linhas) e gera $U^\perp$ então é uma base de $U^\perp$.

Como $(0,1,0,0)$ e $(-1,0,1,0)$ são ortogonais, basta aplicar Gram-Schmidt a $(-1,0,0,1)$:

$$(-1,0,0,1) - P_{(0,1,0,0)}(-1,0,0,1) - P_{(-1,0,1,0)}(-1,0,0,1) =$$

$$= (-1,0,0,1) - \frac{\langle(-1,0,0,1),(0,1,0,0)\rangle}{\|(0,1,0,0)\|^2}(0,1,0,0) - \frac{\langle(-1,0,0,1),(-1,0,1,0)\rangle}{\|(-1,0,1,0)\|^2}(-1,0,1,0) =$$

$$= (-1,0,0,1) - \frac{1}{2}(-1,0,1,0) = \left(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},1\right).$$

Logo, o conjunto

$$\left\{(0,1,0,0),(-1,0,1,0),\left(-\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2},1\right)\right\}$$

é uma base ortogonal de $U^\perp$.

(iii) Seja $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z + 2w = 0\}$. Logo, atendendo a que o produto interno é o usual (de $\mathbb{R}^4$), Tem-se:

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \langle(x,y,z,w),(1,2,1,2)\rangle = 0\right\} = \left(L\left(\{(1,2,1,2)\}\right)\right)^\perp.$$

Assim,

$$U^\perp = \left(L\left(\{(1,2,1,2)\}\right)\right)^{\perp\perp} = L\left(\{(1,2,1,2)\}\right).$$

Logo, o conjunto $\{(1,2,1,2)\}$ é uma base ortogonal de $U^\perp$.

(iv) Seja $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0 \quad \text{e} \quad 2x - y + 2z - w = 0\}$. Logo, atendendo a que o produto interno é o usual (de $\mathbb{R}^4$), Tem-se:

$$\begin{aligned} U &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \langle(x,y,z,w),(1,0,-1,0)\rangle = 0 \text{ e } \langle(x,y,z,w),(2,-1,2,-1)\rangle = 0\right\} \\ &= \left(L\left(\{(1,0,-1,0),(2,-1,2,-1)\}\right)\right)^\perp. \end{aligned}$$

Assim,

$$U^\perp = \left(L\left(\{(1,0,-1,0),(2,-1,2,-1)\}\right)\right)^{\perp\perp} = L\left(\{(1,0,-1,0),(2,-1,2,-1)\}\right).$$

Como

$$\langle(1,0,-1,0),(2,-1,2,-1)\rangle = 0$$

então o conjunto $\{(1,0,-1,0),(2,-1,2,-1)\}$ é uma base ortogonal de $U^\perp$.

15. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Considere também o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$U = L\left(\{(1,1,1),(1,0,0)\}\right).$$

(i) Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, sejam

$$v_1 = (1,1,1) \quad \text{e} \quad v_2 = (1,0,0) - \operatorname{proj}_{(1,1,1)}(1,0,0).$$

Tem-se então:

$$\begin{aligned} v_2 &= (1,0,0) - \mathrm{proj}_{(1,1,1)}(1,0,0) \\ &= (1,0,0) - \frac{\langle (1,0,0),(1,1,1)\rangle}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1) \\ &= (1,0,0) - \frac{1}{3}(1,1,1) \\ &= \left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right). \end{aligned}$$

Logo, o conjunto

$$\left\{(1,1,1),\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\}$$

é uma base ortogonal de U.

(ii) Como o conjunto $\left\{(1,1,1),\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\}$ é uma base ortogonal de U, então

$$\|(1,1,1)\| = \sqrt{3} \quad \text{e} \quad \left\|\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\| = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

então o conjunto

$$\left\{\frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|},\frac{\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)}{\left\|\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)\right\|}\right\} = \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(\frac{\sqrt{6}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada de U.

Por outro lado, tem-se:

$$U^\perp = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z),(1,1,1)\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle (x,y,z),(1,0,0)\rangle = 0\right\} =$$

$$= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

Logo,

$$\begin{cases} y+z=0 \\ \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-z \\ \\ x=0. \end{cases}$$

Assim,

$$U^\perp = \left\{(0,-z,z)\in\mathbb{R}^3 : z\in\mathbb{R}\right\} = L\left(\{(0,-1,1)\}\right).$$

Como

$$\|(0,-1,1)\| = \sqrt{2},$$

então o conjunto

$$\left\{\left(0,-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\} = \left\{\left(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada de $U^\perp$.

Deste modo, uma vez que se tem

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus U^\perp,$$

então

$$\begin{aligned}
(3,2,1) &= P_U(3,2,1) + P_{U^\perp}(3,2,1) = \\
&= \left\langle (3,2,1), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) + \\
&+ \left\langle (3,2,1), \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right) \right\rangle \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right) + \\
&+ \left\langle (3,2,1), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\rangle \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \\
&= \underbrace{\left(3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)}_{\in U} + \underbrace{\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}_{\in U^\perp}.
\end{aligned}$$

Isto é,

$$(3,2,1) = \underbrace{\left(3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)}_{\in U} + \underbrace{\left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}_{\in U^\perp}.$$

(iii) A distância entre o ponto $(1,0,1)$ e o plano $\{(1,1,0)\} + U$ é dada por:

$$d((1,0,1), \{(1,1,0)\}+U) = \|P_{U^\perp}((1,0,1)-(1,1,0))\| = \|P_{U^\perp}(0,-1,1)\| \underset{(0,-1,1)\in_{U^\perp}}{=} \|(0,-1,1)\| = \sqrt{2}.$$

(iv) A distância entre o ponto (x,y,z) e o subespaço U é dada por:

$$\begin{aligned}
d((x,y,z),U) &= \|P_{U^\perp}((x,y,z)-(0,0,0))\| = \|P_{U^\perp}(x,y,z)\| \\
&= \left\| \left\langle (x,y,z), \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\rangle \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\| \\
&= |-y+z| \, \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

16. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Considere também o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0 \quad \text{e} \quad y - z + w = 0\right\}.$$

(i) Tem-se então

$$U = \left\{(y-z, y, z, z-y) \in \mathbb{R}^4 : y, z \in \mathbb{R}\right\} = L(\{(1,1,0,-1), (-1,0,1,1)\}).$$

Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, sejam

$$v_1 = (1,1,0,-1) \quad \text{e} \quad v_2 = (-1,0,1,1) - \text{proj}_{(1,1,0,-1)}(-1,0,1,1).$$

Tem-se então:

$$\begin{aligned}
v_2 &= (-1,0,1,1) - \text{proj}_{(1,1,0,-1)}(-1,0,1,1) \\
&= (-1,0,1,1) - \frac{\langle(-1,0,1,1),(1,1,0,-1)\rangle}{\|(1,1,0,-1)\|^2}(1,1,0,-1) \\
&= (-1,0,1,1) + \frac{2}{3}(1,1,0,-1) \\
&= \left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{1}{3}\right).
\end{aligned}$$

Logo, o conjunto

$$\left\{(1,1,0,-1),\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{1}{3}\right)\right\}$$

é uma base ortogonal de U. Como

$$\|(1,1,0,-1)\| = \sqrt{3} \;\; \text{e} \;\; \left\|\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},1,\frac{1}{3}\right)\right\| = \frac{\sqrt{15}}{3},$$

então o conjunto

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{3\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada de U.

(ii) Como

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x-y+z=0 \quad \text{e} \quad y-z+w=0\right\}$$

e atendendo ao produto interno usual de $\mathbb{R}^4$, Tem-se:

$$\begin{aligned}
U &= \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \langle(x,y,z,w),(1,-1,1,0)\rangle = 0 \;\; \text{e} \;\; \langle(x,y,z,w),(0,1,-1,1)\rangle = 0\right\} \\
&= \left(L\left(\{(1,-1,1,0),(0,1,-1,1)\}\right)\right)^{\perp}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$U^{\perp} = \left(L\left(\{(1,-1,1,0),(0,1,-1,1)\}\right)\right)^{\perp\perp} = L\left(\{(1,-1,1,0),(0,1,-1,1)\}\right).$$

Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, sejam

$$v_1 = (1,-1,1,0) \quad \text{e} \quad v_2 = (0,1,-1,1) - \text{proj}_{(1,-1,1,0)}\,(0,1,-1,1).$$

Tem-se então:

$$\begin{aligned}
v_2 &= (0,1,-1,1) - \text{proj}_{(1,-1,1,0)}\,(0,1,-1,1) \\
&= (0,1,-1,1) - \frac{\langle(0,1,-1,1),(1,-1,1,0)\rangle}{\|(1,-1,1,0)\|^2}\,(1,-1,1,0) \\
&= (0,1,-1,1) + \frac{2}{3}\,(1,-1,1,0) \\
&= \left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1\right).
\end{aligned}$$

Logo, o conjunto
$$\left\{(1,-1,1,0)\,,\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1\right)\right\}$$
é uma base ortogonal de $U^{\perp}$. Como
$$\|(1,-1,1,0)\|=\sqrt{3}\ \text{ e }\ \left\|\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3},1\right)\right\|=\frac{\sqrt{15}}{3},$$
então o conjunto
$$\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0\right),\left(\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15},-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\}$$
é uma base ortonormada de $U^{\perp}$.

(iii) A projecção ortogonal P_U de $\mathbb{R}^4$ sobre U é definida por:
$$\begin{array}{rcl} P_U & : & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,w) & \to & \left\langle (x,y,z,w),\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\rangle\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+ \\ & & +\left\langle (x,y,z,w),\left(-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{3\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15}\right)\right\rangle\left(-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{3\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15}\right), \end{array}$$
uma vez que o conjunto
$$\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{3\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15}\right)\right\}$$
é uma base ortonormada de U. Logo, a projecção ortogonal de $(0,0,1,0)$ sobre U é dada por:
$$\begin{array}{rcl} P_U(0,0,1,0) & = & \left\langle (0,0,1,0),\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\rangle\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0,-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+ \\ & & +\left\langle (0,0,1,0),\left(-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{3\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15}\right)\right\rangle\left(-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{3\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15}\right) \\ & = & \left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right). \end{array}$$
A projecção ortogonal $P_{U^{\perp}}$ de $\mathbb{R}^4$ sobre $U^{\perp}$ é definida por:
$$\begin{array}{rcl} P_{U^{\perp}} & : & \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,w) & \to & \left\langle (x,y,z,w),\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)\right\rangle\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)+ \\ & & +\left\langle (x,y,z,w),\left(\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15},-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\rangle\left(\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15},-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{5}\right), \end{array}$$

uma vez que o conjunto

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0\right),\left(\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15},-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada de $U^{\perp}$. Logo, a projecção ortogonal de $(0,0,1,0)$ sobre $U^{\perp}$ é dada por:

$$\begin{aligned}
P_{U^{\perp}}(0,0,1,0) &= \left\langle (0,0,1,0),\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)+ \\
&\quad +\left\langle (0,0,1,0),\left(\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15},-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\rangle \left(\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15},-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{5}\right) \\
&= \left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)+\left(-\frac{2}{15},-\frac{1}{15},\frac{1}{15},-\frac{1}{5}\right)=\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5},\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right).
\end{aligned}$$

Nota muito importante: Uma vez que se tem

$$\mathbb{R}^4 = U \oplus U^{\perp},$$

então para todo o $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$,

$$(x,y,z,w) = P_U(x,y,z,w) + P_{U^{\perp}}(x,y,z,w).$$

Logo, uma vez calculado $P_U(0,0,1,0)$ pela definição, como se fêz atrás, obtendo-se $P_U(0,0,1,0) = \left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$, então não precisamos de efectuar o cálculo de $P_{U^{\perp}}(0,0,1,0)$ pela definição. Basta efectuar:

$$\begin{aligned}
P_{U^{\perp}}(0,0,1,0) &= (0,0,1,0) - P_U(0,0,1,0) \\
&= (0,0,1,0) - \left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right) \\
&= \left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5},\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right).
\end{aligned}$$

(iv) Escolhendo um ponto de U, por exemplo $(0,0,0,0)$, a distância entre $(0,0,1,0)$ e U é dada por:

$$d((0,0,1,0),U) = \|P_{U^{\perp}}((0,0,1,0)-(0,0,0,0))\| = \|P_{U^{\perp}}(0,0,1,0)\| =$$

$$\begin{aligned}
= &\left\| \left\langle (0,0,1,0),\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},0\right)+\right. \\
&\left. +\left\langle (0,0,1,0),\left(\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15},-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\rangle \left(\frac{2\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{15},-\frac{\sqrt{15}}{15},\frac{\sqrt{15}}{5}\right)\right\|
\end{aligned}$$

$$= \left\|\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)+\left(-\frac{2}{15},-\frac{1}{15},\frac{1}{15},-\frac{1}{5}\right)\right\| = \left\|\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{5},\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)\right\| = \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

(v) A distância entre (x, y, z, w) e U é dada por:

$$d((x,y,z,w),U) = \|P_{U^\perp}((x,y,z,w)-(0,0,0,0))\| = \|P_{U^\perp}(x,y,z,w)\| =$$

$$= \left\| \left\langle (x,y,z,w), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) \right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) + \right.$$
$$\left. + \left\langle (x,y,z,w), \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right) \right\rangle \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right) \right\| =$$

$$= \left\| \left(x\frac{\sqrt{3}}{3} - y\frac{\sqrt{3}}{3} + z\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) + \right.$$
$$\left. + \left(x\frac{2\sqrt{15}}{15} + y\frac{\sqrt{15}}{15} - z\frac{\sqrt{15}}{15} + w\frac{\sqrt{15}}{5}\right) \left(\frac{2\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{15}, -\frac{\sqrt{15}}{15}, \frac{\sqrt{15}}{5}\right) \right\| =$$

$$= \left\| \left(\frac{2}{5}w + \frac{3}{5}x - \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z, \frac{1}{5}w - \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y - \frac{2}{5}z, \frac{1}{5}x - \frac{1}{5}w - \frac{2}{5}y + \frac{2}{5}z, \frac{3}{5}w + \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y - \frac{1}{5}z \right) \right\| =$$
$$= \frac{1}{5}\sqrt{(2w+3x-y+z)^2 + (w-x+2y-2z)^2 + (x-w-2y+2z)^2 + (3w+2x+y-z)^2}.$$

17. Em P_2:

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Considere também o seguinte subespaço de P_2:

$$U = \{p(t) \in P_2 : p(0) = 0\}.$$

(i) Tem-se:

$$U = \left\{a_1 t + a_2 t^2 : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\} = L(\{t, t^2\}).$$

Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, sejam

$$p_1(t) = t \quad \text{e} \quad p_2(t) = t^2 - \frac{\langle t^2, t \rangle}{\|t\|^2} t.$$

Logo,

$$p_2(t) = t^2 - \frac{(-1)^2(-1) + 0^2 0 + 1^2 1}{(-1).(-1) + 0.0 + 1.1} t = t^2.$$

Logo, o conjunto $\{t, t^2\}$ é uma base ortogonal de U. Assim, o conjunto

$$\left\{ \frac{t}{\|t\|}, \frac{t^2}{\|t^2\|} \right\} = \left\{ \frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t^2}{\sqrt{2}} \right\} = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \right\}$$

é uma base ortonormada de U.

(ii) A projecção ortogonal P_U de P_2 sobre U é definida por:

$$\begin{array}{rcl} P_U & : & P_2 \to P_2 \\ p(t) & \to & \left\langle p(t), \frac{\sqrt{2}}{2}t \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}t + \left\langle p(t), \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}t^2, \end{array}$$

uma vez que o conjunto

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \right\}$$

é uma base ortonormada de U. Logo, a projecção ortogonal de $1+t$ sobre U é dada por:

$$P_U(1+t) = \left\langle 1+t, \frac{\sqrt{2}}{2}t \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}t + \left\langle 1+t, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 \right\rangle \frac{\sqrt{2}}{2}t^2 = t + t^2$$

A projecção ortogonal $P_{U^\perp}$ de $\mathbb{R}^3$ sobre $U^\perp$ é definida por:

$$\begin{array}{rcl} P_{U^\perp} & : & P_2 \to P_2 \\ p(t) & \to & \left\langle p(t), -1+t^2 \right\rangle (-1+t^2), \end{array}$$

uma vez que o conjunto

$$\{-1+t^2\}$$

é uma base ortonormada de $U^\perp$. Logo, a projecção ortogonal de $1+t$ sobre $U^\perp$ é dada por:

$$P_{U^\perp}(1+t) = \left\langle 1+t, -1+t^2 \right\rangle (-1+t^2) = 1 - t^2$$

Nota muito importante: Uma vez que se tem

$$P_2 = U \oplus U^\perp,$$

então para todo o $p(t) \in P_2$,

$$p(t) = P_U(p(t)) + P_{U^\perp}(p(t)).$$

Logo, uma vez calculado $P_{U^\perp}(1+t)$ pela definição, como se fêz atrás, obtendo-se $P_{U^\perp}(1+t) = 1-t^2$, então não precisamos de efectuar o cálculo de $P_U(1+t)$ pela definição. Basta efectuar:

$$P_U(1+t) = 1 + t - P_{U^\perp}(1+t) = t + t^2.$$

(iii) Escolhendo um ponto de U, por exemplo o polinómio nulo 0, a distância entre $a_0+a_1t+a_2t^2$ e U, com $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, é dada por:

$$d(a_0 + a_1t + a_2t^2, U) = \left\| P_{U^\perp}(a_0 + a_1t + a_2t^2) \right\| =$$

$$= \left\| \left\langle a_0 + a_1t + a_2t^2, -1+t^2 \right\rangle (-1+t^2) \right\| = |a_0| \left\| 1 - t^2 \right\| = |a_0| \,.$$

18. Considere no espaço linear $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ o produto interno definido da seguinte forma:

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T).$$

Considere também o subespaço U de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ constituído por todas as matrizes simétricas reais do tipo 2×2:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : b = c \right\}.$$

(i) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ e $A, A', B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Tem-se

$$\langle xA + yA', B\rangle = \mathrm{tr}((xA + yA')\,B^T) = \mathrm{tr}(xAB^T + yA'B^T) \underset{\text{tr é linear}}{=}$$

$$= x\mathrm{tr}(AB^T) + y\mathrm{tr}(A'B^T) = x\,\langle A, B\rangle + y\,\langle A', B\rangle$$

$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T) = \mathrm{tr}(\left(A^T\right)^T B^T) = \mathrm{tr}(\left(BA^T\right)^T) = \mathrm{tr}(BA^T) = \langle B, A\rangle$$

$$\langle A, A\rangle = \mathrm{tr}(AA^T) = \mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^T \right) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0$$

para todo o $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e

$$\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow a = b = c = d = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, a aplicação $\langle , \rangle$ define um produto interno em $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

(ii) Tem-se

$$U^\perp = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \text{ e } \right.$$
$$\left. \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \text{ e } \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \right\}.$$

Logo,

$$\begin{cases} a = 0 \\ \\ b + c = 0 \\ \\ d = 0. \end{cases}$$

Ou seja,

$$U^\perp = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right).$$

Como

$$\begin{aligned}
\left\|\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\| &= \sqrt{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle} \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T \right)} \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)} \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)} = \sqrt{2},
\end{aligned}$$

então o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base ortonormada de $U^{\perp}$.

(iii) A distância entre $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e U é dada por:

$$\begin{aligned}
d\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, U \right) &= \left\| P_{U^{\perp}}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\| = \\
&= \sqrt{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle} = \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \right)} = \\
&= \sqrt{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \right)} = \frac{\sqrt{2}}{2}.
\end{aligned}$$

19. a) Sejam $u_1 = (1, 0, -1)$ e

$$\begin{aligned}
u_2 &= (0, -1, 1) - \operatorname{proj}_{(1,0,-1)}(0, -1, 1) = \\
&= (0, -1, 1) - \frac{\langle (0, -1, 1), (1, 0, -1) \rangle}{\|(1, 0, -1)\|^2}(1, 0, -1) = \\
&= (0, -1, 1) - \frac{-1}{2}(1, 0, -1) = (1/2, -1, 1/2).
\end{aligned}$$

Logo, o conjunto $\{u_1, u_2\}$ é uma base ortogonal para U.

b) O conjunto

$$\left\{\frac{1}{\|u_1\|}u_1, \frac{1}{\|u_2\|}u_2\right\} = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada para U.

Uma vez que

$$\begin{aligned} U^{\perp} &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z), (1,0,-1)\rangle = 0 \;\text{ e }\; \langle (x,y,z), (0,-1,1)\rangle = 0\right\} = \\ &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z \;\text{ e }\; y = z\right\} = L\left(\{(1,1,1)\}\right), \end{aligned}$$

o conjunto $\left\{\frac{1}{\|(1,1,1)\|}(1,1,1)\right\} = \left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$ é uma base ortonormada para $U^{\perp}$.

Logo, o conjunto

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores geradores de U.

c) Tem-se

$$P_{U^{\perp}}(1,0,0) = \left\langle (1,0,0), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\rangle \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

d) Tem-se

$$\begin{aligned} d\left((1,0,0), U^{\perp}\right) &= \|P_U(1,0,0)\| = \|(1,0,0) - P_{U^{\perp}}(1,0,0)\| = \\ &= \left\|(1,0,0) - \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right\| = \left\|\left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\| = \frac{\sqrt{6}}{3}. \end{aligned}$$

20. a) Sejam $p(t), q(t) \in P_2$, isto é, $p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ e $q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2$, com $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$\left\langle a_0 + a_1 t + a_2 t^2, b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \right\rangle = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Assim, a aplicação $\langle , \rangle$ é desde logo bilinear. Além disso, atendendo a que a matriz $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ é simétrica e todos os seus valores próprios ($3, 1$ e 2) são positivos, conclui-se que a aplicação $\langle , \rangle$ define em P_2 um produto interno.

b) Tem-se

$$\begin{aligned} W &= \left\{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2 : p(0) = p(1) \ \text{ e } \ p(1) = p(-1)\right\} = \\ &= \left\{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2 : a_1 = -a_2 \ \text{ e } \ a_1 = 0\right\} = \\ &= \{p(t) = a_0 : a_0 \in \mathbb{R}\} = L\left(\{1\}\right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} W^\perp &= \left\{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2 : \left\langle a_0 + a_1 t + a_2 t^2, 1\right\rangle = 0\right\} = \\ &= \left\{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in P_2 : a_0 = 0\right\} = L\left(\left\{t, t^2\right\}\right). \end{aligned}$$

Assim, o conjunto $\left\{\frac{1}{\|t\|}t, \frac{1}{\|t^2\|}t^2\right\} = \left\{t, \frac{\sqrt{2}}{2}t^2\right\}$ é uma base ortonormada para $W^\perp$.

21. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) O conjunto $\{(1,0,1),(1,1,0)\}$ é uma base para $\mathcal{L}(A)$ pois gera $\mathcal{L}(A)$ e é linearmente independente.

Aplicando Gram-Schmidt, o conjunto $\left\{(1,0,1),(1,1,0) - \text{proj}_{\,(1,0,1)}(1,1,0)\right\} =$

$$= \left\{(1,0,1),(1,1,0) - \frac{\langle(1,1,0),(1,0,1)\rangle}{\|(1,0,1)\|^2}(1,0,1)\right\} = \left\{(1,0,1), \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right)\right\}$$

é uma base ortogonal para $\mathcal{L}(A)$.

b) Uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclui dois vectores de $\mathcal{C}(A)$:

$$\left\{(1,0,0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

Note que $(1,0,0), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \in \mathcal{C}(A)$.

c) O elemento de $(\mathcal{N}(A))^\perp = \mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(-1,1,-1)$ é:

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{L}(A)}(-1,1,-1) &= (-1,1,-1) - P_{\mathcal{N}(A)}(-1,1,-1) \underset{\mathcal{N}(A)=L(\{(1,-1,-1)\})}{=} \\ &= (-1,1,-1) - \frac{\langle(-1,1,-1),(1,-1,-1)\rangle}{\|(1,-1,-1)\|^2}(1,-1,-1) = \\ &= (-1,1,-1) + \frac{1}{3}(1,-1,-1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

e a distância entre $(-1,1,-1)$ e $(\mathcal{L}(A))^{\perp}$ é:

$$d\left((-1,1,-1),(\mathcal{L}(A))^{\perp}\right)=\left\|P_{\mathcal{L}(A)}(-1,1,-1)\right\|=\left\|\left(-\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{4}{3}\right)\right\|=\frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

22. a) Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, sejam

$$v_1=(1,0,-1)\quad \text{e}\quad v_2=(0,1,2)-\operatorname{proj}_{(1,0,-1)}(0,1,2).$$

Tem-se então:

$$v_2=(0,1,2)-\frac{\langle(0,1,2),(1,0,-1)\rangle}{\|(1,0,-1)\|^2}(1,0,-1)=(0,1,2)-\frac{-2}{2}(1,0,-1)=(1,1,1).$$

Logo, o conjunto

$$\{(1,0,-1),(1,1,1)\}$$

é uma base ortogonal de U.

b) Tem-se

$$\begin{aligned} U^{\perp} &= \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\langle(x,y,z),(1,0,-1)\rangle=0 \ \text{ e } \ \langle(x,y,z),(1,1,1)\rangle=0\right\}= \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&0&-1\\1&1&1\end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\end{bmatrix}\right)=L\left(\{(1,-2,1)\}\right),\end{aligned}$$

sendo $\{(1,-2,1)\}$ uma base ortogonal de $U^{\perp}$. Deste modo, uma vez que se tem

$$\mathbb{R}^3=U\oplus U^{\perp},$$

e sendo $\{(1,0,-1),(1,1,1)\}$ uma base ortogonal de U, então

$$(2,-3,4)=P_U(2,-3,4)+P_{U^{\perp}}(2,-3,4)=$$

$$=\frac{\langle(2,-3,4),(1,0,-1)\rangle}{\|(1,0,-1)\|^2}(1,0,-1)+\frac{\langle(2,-3,4),(1,1,1)\rangle}{\|(1,1,1)\|^2}(1,1,1)+\frac{\langle(2,-3,4),(1,-2,1)\rangle}{\|(1,-2,1)\|^2}(1,-2,1)=$$

$$=-(1,0,-1)+(1,1,1)+2(1,-2,1)=$$

$$=\underbrace{(0,1,2)}_{\in U}+\underbrace{(2,-4,2)}_{\in U^{\perp}}.$$

Isto é,

$$(2,-3,4)=\underbrace{(0,1,2)}_{\in U}+\underbrace{(2,-4,2)}_{\in U^{\perp}}.$$

c) A distância entre o ponto $(2,3,7)$ e o plano $\{(1,2,3)\}+U$ é dada por:

$$d((2,3,7),\{(1,2,3)\}+U)=\|P_{U^{\perp}}((2,3,7)-(1,2,3))\|=\|P_{U^{\perp}}(1,1,4)\|=$$

$$= \left\| \frac{\langle (1,1,4),(1,-2,1)\rangle}{\|(1,-2,1)\|^2}(1,-2,1) \right\| = \frac{1}{2}\|(1,-2,1)\| = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

23. a) Como $(1,0,1) = (1,1,1) - (0,1,0)$ então $(1,0,1),(0,1,0) \in \mathcal{C}(A)$. Além disso $\langle (1,0,1),(0,1,0)\rangle = 0$. Por outro lado, como

$$(\mathcal{C}(A))^{\perp} = \left(\mathcal{L}\left(A^T\right)\right)^{\perp} = \mathcal{N}\left(A^T\right) = L\left(\{(-1,0,1)\}\right)$$

e

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{C}(A) \oplus (\mathcal{C}(A))^{\perp}$$

uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ que inclua um vector de $(\mathcal{C}(A))^{\perp}$ poderá ser: $\{(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,1)\}$.

b) A distância d entre $(1,1,0)$ e $\mathcal{L}(A)$ é dada por:

$$d\left((1,1,0),\mathcal{L}(A)\right) = \left\|P_{(\mathcal{L}(A))^{\perp}}(1,1,0)\right\| = \left\|P_{\mathcal{N}(A)}(1,1,0)\right\| =$$

$$= \left\|\operatorname{proj}_{(-1,0,1)}(1,1,0)\right\| = \left\| \frac{\langle (1,1,0),(-1,0,1)\rangle}{\|(-1,0,1)\|^2}(-1,0,1) \right\| = \left\| \left(\frac{1}{2},0,-\frac{1}{2}\right) \right\| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

c) Como

$$(\mathcal{N}(A))^{\perp} = \mathcal{N}(B) \Leftrightarrow \mathcal{N}(A) = (\mathcal{N}(B))^{\perp} = \mathcal{L}(B)$$

e

$$\mathcal{N}(A) = L\left(\{(-1,0,1)\}\right)$$

logo poderá ter-se $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

24. Considere a recta

$$r = (1,1,1) + L\left(\{(1,-1,1)\}\right).$$

a) Seja $W = L\left(\{(1,-1,1)\}\right)$. Então

$$W = \left(W^{\perp}\right)^{\perp} = \left(\mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right)^{\perp} = \left(L\left(\{(1,1,0),(-1,0,1)\}\right)\right)^{\perp}.$$

Logo,

$$(x-1,y-1,z-1) \in W \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\langle (x-1,y-1,z-1),(1,1,0)\rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle (x-1,y-1,z-1),(-1,0,1)\rangle = 0\right)$$
$$\Leftrightarrow (x+y=2 \;\text{ e }\; 3x+z=4)$$

pelo que, as equações cartesianas da recta r são:

$$x+y=2 \;\text{ e }\; -x+z=0.$$

b) Como

$$W^{\perp} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z),(1,-1,1)\rangle = 0\right\},$$

então a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $u = (1,0,0)$ e é perpendicular à recta r é:

$$\langle (x-1, y-0, z-0),(1,-1,1)\rangle = 0 \Leftrightarrow x - y + z = 1.$$

25. Seja $\mathcal{P}$ o plano (em $\mathbb{R}^3$) que passa pelos pontos: $(1,1,1)$, $(2,0,3)$ e $(0,2,2)$. Tem-se

$$\mathcal{P} = \{(1,1,1)\} + L\left(\{(1,-1,2),(-1,1,1)\}\right)$$

uma vez que

$$(1,-1,2) = (2,0,3) - (1,1,1) \qquad \text{e} \qquad (-1,1,1) = (0,2,2) - (1,1,1).$$

a) Seja

$$U = L\left(\{(1,-1,2),(-1,1,1)\}\right).$$

Logo,

$$U = \left(U^{\perp}\right)^{\perp} = \left(\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)\right)^{\perp} = \left(\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\right)^{\perp}$$

$$= \left(L\left(\{(1,1,0)\}\right)\right)^{\perp} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z),(1,1,0)\rangle = 0\right\}$$

e assim, **a equação cartesiana** do plano $\mathcal{P}$ que passa pelo ponto $(1,1,1)$ é dada por:

$$\left(\langle (x-1,y-1,z-1),(1,1,0)\rangle = 0\right) \Leftrightarrow \left(1\,(x-1) + 1\,(y-1) + 0\,(z-1) = 0\right),$$

ou seja por

$$x + y = 2.$$

b) Equações paramétricas de $\mathcal{P}$:

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha - \beta \\ y = 1 - \alpha + \beta \\ z = 1 + 2\alpha + \beta \end{cases}$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

c) Equação vectorial de $\mathcal{P}$:

$$(x,y,z) = (1,1,1) + \alpha(1,-1,2) + \beta(-1,1,1), \quad \text{com } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$