

Produtos internos

1. Diga quais das seguintes aplicações $\langle, \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definem em $\mathbb{R}^2$ um produto interno.
 - (i) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2$
 - (ii) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1 y_1 - x_2 y_1 - x_1 y_2 + 3x_2 y_2$
 - (iii) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = -2x_1 y_1 + 3x_2 y_2$
2. Diga quais das seguintes aplicações $\langle, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definem em $\mathbb{R}^3$ um produto interno.
 - (i) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$
 - (ii) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_2 - x_2 y_1$
 - (iii) $\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1 y_1 + x_1 y_3 + x_3 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3$
3. Considere os vectores $u = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ e $v = \left(\frac{2}{\sqrt{30}}, \frac{3}{\sqrt{30}}\right)$. Verifique que o conjunto $\{u, v\}$ é ortonormado relativamente ao produto interno definido em $\mathbb{R}^2$ por:

$$\langle u, v \rangle = 3u_1 v_1 + 2u_2 v_2,$$

onde $u = (u_1, u_2)$ e $v = (v_1, v_2)$. Verifique porém que o mesmo conjunto $\{u, v\}$ não é ortonormado relativamente ao produto interno usual definido em $\mathbb{R}^2$.

4. Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual. Determine o subespaço de $\mathbb{R}^4$ ortogonal aos vectores $(1, 0, 0, 0)$ e $(1, 0, 0, 1)$.
5. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno definido por:

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

- (i) Calcule $\|u\|$, para qualquer vector $u = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
 - (ii) Considere os vectores $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (-1, 1, 0)$ e $u_3 = (0, 0, 1)$. Calcule os ângulos formados pelos vectores: u_1 e u_2 ; u_1 e u_3 ; u_2 e u_3 .
 - (iii) Justifique que o conjunto $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$. Calcule as coordenadas de um vector $u \in \mathbb{R}^3$ em relação a esta base.
6. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Determine uma base ortonormada para o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vectores: $(1, 0, -1, 0)$, $(-1, 2, 0, 1)$ e $(2, 0, 2, 1)$.
 7. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Considere também os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$: $U = L(\{(0, 1, 1), (0, 0, 1)\})$ e $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\}$.
 - (i) Determine uma base ortogonal para U e uma base ortonormada para V .
 - (ii) Determine duas bases ortonormadas para $\mathbb{R}^3$: uma que inclua dois vectores de U e outra que inclua dois vectores de V .
 - (iii) Determine o elemento de U mais próximo de $(1, 1, 1)$ e a distância entre $(1, 1, 1)$ e $V^\perp$.

8. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A .
- (i) Determine uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclua dois vectores de $\mathcal{C}(A)$.
 - (ii) Determine o elemento de $\mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(1, 1, 1)$ e a distância entre $(1, 1, 1)$ e $\mathcal{N}(A)$.
9. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A .
- (i) Determine uma base ortonormada para $(\mathcal{N}(A))^\perp$ (o complemento ortogonal do núcleo de A).
 - (ii) Determine uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclua dois vectores de $\mathcal{C}(A)$.
 - (iii) Determine o elemento de $\mathcal{L}(A)$ mais próximo de $(1, 2, 3)$ e a distância entre $(1, 2, 3)$ e $(\mathcal{L}(A))^\perp$.
10. Considere em $\mathbb{R}^4$ o seguinte subespaço: $U = L(\{(1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 1)\})$. Determine uma matriz A do tipo 2×4 cujo núcleo seja igual a U , isto é, tal que $U = \mathcal{N}(A)$.
11. Defina o produto interno em $\mathbb{R}^2$ em relação ao qual a base $\{(1, 0), (1, -1)\}$ é ortonormada.
12. Considere a aplicação $\langle, \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por
- $$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 - x_1 y_2 - x_2 y_1 + 4x_2 y_2 + x_3 y_3.$$
- (i) Verifique que $\langle, \rangle$ define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.
 - (ii) Seja $V = L(\{(3, 4, 0)\}) \subset \mathbb{R}^3$. Diga qual é o ponto de V mais próximo de $(0, 1, 0)$.
 - (iii) Determine uma base ortogonal para o complemento ortogonal de V , em relação ao produto interno $\langle, \rangle$.
13. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $v_1 = (0, 1, 0)$ e $v_2 = (\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5})$. Escreva $u = (1, 2, 3)$ na forma $u = u_1 + u_2$, com $u_1 \in U$ e $u_2 \in U^\perp$.
14. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Em cada alínea seguinte, determine uma base ortogonal para o complemento ortogonal de U , isto é, para $U^\perp$.
- (i) $U = L(\{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 1)\})$
 - (ii) $U = L(\{(1, 0, 1, 1)\})$
 - (iii) $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + z + 2w = 0\}$
 - (iv) $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - z = 0 \text{ e } 2x - y + 2z - w = 0\}$
15. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Considere também o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$U = L(\{(1, 1, 1), (1, 0, 0)\}).$$

- (i) Determine uma base ortogonal para U .
- (ii) Determine $u \in U$ e $v \in U^\perp$ tais que $(3, 2, 1) = u + v$.
- (iii) Determine a distância entre o ponto $(1, 0, 1)$ e o plano $\{(1, 1, 0)\} + U$.
- (iv) Determine a distância entre o ponto (x, y, z) e o plano U .

16. Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Considere também o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0 \text{ e } y - z + w = 0\}.$$

- (i) Determine uma base ortonormada para U .
- (ii) Determine uma base ortonormada para $U^\perp$.
- (iii) Determine as projecções ortogonais de $(0, 0, 1, 0)$ sobre U e $U^\perp$ respectivamente.
- (iv) Determine a distância entre o ponto $(0, 0, 1, 0)$ e o subespaço U .
- (v) Determine a distância entre o ponto (x, y, z, w) e o subespaço U .

17. Considere em P_2 o produto interno $\langle, \rangle : P_2 \times P_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Considere também o seguinte subespaço de P_2 : $U = \{p(t) \in P_2 : p(0) = 0\}$.

- (i) Determine uma base ortonormada para U .
- (ii) Determine as projecções ortogonais do polinómio $1 + t$ sobre U e $U^\perp$ respectivamente.
- (iii) Determine a distância entre o polinómio $a_0 + a_1t + a_2t^2$ e o subespaço U .

18. Considere a aplicação $\langle, \rangle : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T)$. Considere também o subespaço U de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ constituído por todas as matrizes simétricas reais do tipo 2×2 :

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : b = c \right\}.$$

- (i) Verifique que $\langle, \rangle$ define um produto interno em $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$.
- (ii) Determine uma base ortonormada para $U^\perp$.
- (iii) Determine a distância entre $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e U .

19. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Considere também o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$U = L(\{(1, 0, -1), (0, -1, 1)\}).$$

- a) Determine uma base ortogonal para U .
- b) Determine uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclua dois vectores geradores de U .
- c) Determine a projecção ortogonal de $(1, 0, 0)$ sobre $U^\perp$, isto é, $P_{U^\perp}(1, 0, 0)$.
- d) Determine a distância do ponto $(1, 0, 0)$ a $U^\perp$.

20. Considere a aplicação $\langle, \rangle : P_2 \times P_2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle a_0 + a_1t + a_2t^2, b_0 + b_1t + b_2t^2 \rangle = 3a_0b_0 + a_1b_1 + 2a_2b_2. \quad (*)$$

Considere também o seguinte subespaço de P_2 :

$$W = \{p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in P_2 : p(0) = p(1) \text{ e } p(1) = p(-1)\}.$$

a) Verifique que a aplicação $\langle, \rangle$ define em P_2 um produto interno.

b) Determine uma base ortonormada para $W^\perp$, relativamente ao produto interno (*).

21. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ e considere o produto interno usual. Sejam $\mathcal{N}(A)$, $\mathcal{C}(A)$ e $\mathcal{L}(A)$ respectivamente o núcleo, espaço das colunas e espaço das linhas de A .

a) Determine uma base ortogonal para $\mathcal{L}(A)$.

b) Determine uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ que inclua dois vectores de $\mathcal{C}(A)$.

c) Determine o elemento de $(\mathcal{N}(A))^\perp$ mais próximo de $(-1, 1, -1)$ e a distância entre $(-1, 1, -1)$ e $(\mathcal{L}(A))^\perp$.

22. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelo conjunto $\{(1, 0, -1), (0, 1, 2)\}$.

a) Determine uma base ortogonal para U .

b) Determine $u \in U$ e $v \in U^\perp$ tais que $(2, -3, 4) = u + v$.

c) Determine a distância entre o ponto $(2, 3, 7)$ e o plano $\{(1, 2, 3)\} + U$.

23. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sejam $\mathcal{C}(A)$, $\mathcal{L}(A)$ e $\mathcal{N}(A)$, respectivamente, o espaço das colunas, o espaço das linhas e o núcleo de A .

a) Determine uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ que inclua um vector de $(\mathcal{C}(A))^\perp$ (complemento ortogonal de $\mathcal{C}(A)$).

b) Calcule a distância entre $(1, 1, 0)$ e $\mathcal{L}(A)$.

c) Determine uma matriz B tal que $(\mathcal{N}(A))^\perp = \mathcal{N}(B)$ (o complemento ortogonal de $\mathcal{N}(A)$ é igual ao núcleo de B).

24. Considere a recta $r = (1, 1, 1) + L(\{(1, -1, 1)\})$. Considere o produto interno usual.

a) Determine as equações cartesianas da recta r .

b) Determine a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $u = (1, 0, 0)$ e é ortogonal à recta r .

25. Seja P o plano que passa pelos pontos $(1, 1, 1)$, $(2, 0, 3)$ e $(0, 2, 2)$. Considere o produto interno usual.

a) Determine a equação cartesiana de P .

b) Determine as equações paramétricas de P .

c) Determine a equação vectorial de P .