Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 2^o semestre 2017/2018

Espaços lineares (resolução)

1. (i) Seja $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$. Por exemplo:

$$(1,1) \in U, \quad \text{mas} \quad (-1)(1,1) = (-1,-1) \notin U.$$

Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Seja $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$. Por exemplo:

$$(1,0),(0,1) \in U, \quad \text{mas} \quad (1,0)+(0,1) = (1,1) \notin U.$$

Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(iii) Seja $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$. Por exemplo:

$$(1,1) \in U, \quad \text{mas} \quad 2(1,1) = (2,2) \notin U.$$

Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(iv) Seja $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = \pi\}$. Por exemplo:

$$(0,0) \notin U.$$

Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(v) Seja $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{N}_0 \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$. Por exemplo:

$$(1,1) \in U, \quad \text{mas} \quad \frac{1}{2}(1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin U.$$

Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(vi) Seja $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \pi^2\}$. Por exemplo:

$$(1,1) \in U, \quad \text{mas} \quad 3(1,1) = (3,3) \notin U.$$

Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(vii) Seja $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$. Por exemplo:

$$(-1,0),(0,1) \in U, \quad \text{mas} \quad (-1,0)+(0,1) = (-1,1) \notin U.$$

Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

2. Atendendo às respectivas dimensões, os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^2$, com as operações usuais, são todos os subespaços de $\mathbb{R}^2$.

(i) $\{(0,0)\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Seja $V_k = \{(x, kx) : x \in \mathbb{R}\}$ com $k \in \mathbb{R}$ (fixo). $V_k \neq \varnothing$ pois $(0,0) \in V_k$.

Sejam $(x_1, kx_1), (x_2, kx_2) \in V_k$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$(x_1, kx_1) + (x_2, kx_2) = (x_1 + x_2, k\,(x_1 + x_2)) \in V_k$$

e, com $(x, kx) \in V_k$,

$$\alpha(x, kx) = (\alpha x, k\,(\alpha x)) \in V_k.$$

Logo, para todo o $k \in \mathbb{R}$, V_k é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Em alternativa, uma vez que

$$V_k = L\left(\{(1,k)\}\right),$$

para todo o $k \in \mathbb{R}$, conclui-se que V_k é subespaço de $\mathbb{R}^2$ (para todo o $k \in \mathbb{R}$).

(iii) Seja

$$U = \{(0,a) : a \in \mathbb{R}\}.$$

$U \neq \varnothing$ pois $(0,0) \in U$. Sejam $(0,a_1), (0,a_2) \in U$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$(0,a_1) + (0,a_2) = (0, a_1 + a_2) \in U$$

e, com $(0,a) \in U$,

$$\alpha(0,a) = (0, \alpha a) \in U.$$

Logo, U é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

Em alternativa, uma vez que

$$U = L\left(\{(0,1)\}\right),$$

conclui-se que U é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

(iv) $\mathbb{R}^2$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$.

3. U_k é subespaço de $\mathbb{R}^3$ se e só se $k = 0$.

4. (i) Seja

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2\right\}.$$

Ora $(0,0,0) \notin U$. Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Seja
$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\right\}.$$
Ora $(0,0,0) \notin U$. Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(iii) Seja
$$U = \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}.$$
Uma vez que $(0,0,z) = z(0,0,1)$, para qualquer $z \in \mathbb{R}$, tem-se:
$$U = L\left(\{(0,0,1)\}\right).$$
Logo, U é subespaço de $\mathbb{R}^3$. O conjunto $\{(0,0,1)\}$ gera o subespaço U.

(iv) Seja
$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x \quad \text{e} \quad z = 3x\right\}.$$
Tem-se $U = \{(x,2x,3x) : x \in \mathbb{R}\}$.

Uma vez que $(x,2x,3x) = x(1,2,3)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se:
$$U = L\left(\{(1,2,3)\}\right).$$
Logo, U é subespaço de $\mathbb{R}^3$. O conjunto $\{(1,2,3)\}$ gera o subespaço U.

$U = \mathcal{N}(A)$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$, com $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(v) Seja
$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1\right\}.$$
Ora $(0,0,0) \notin U$. Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(vi) Seja
$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \quad \text{ou} \quad y = z\right\}.$$
Tem-se:
$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\right\} \cup \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = z\right\}$$
Por exemplo:
$$(1,1,2), (1,2,2) \in U, \quad \text{mas} \quad (1,1,2) + (1,2,2) = (2,3,4) \notin U.$$
Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

(vii) Seja
$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0 \quad \text{e} \quad 2y + z = 0\right\}.$$
Tem-se
$$U = \{(x,x,-2x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Uma vez que
$$(x, x, -2x) = x(1, 1, -2),$$
para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se:
$$U = L\left(\{(1, 1, -2)\}\right).$$
Logo, U é subespaço de $\mathbb{R}^3$. O conjunto $\{(1, 1, -2)\}$ gera o subespaço U.

$U = \mathcal{N}(A)$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(viii) Seja
$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\right\}.$$
Por exemplo:
$$(1, 0, 1), (0, 1, 0) \in U, \quad \text{mas} \quad (1, 0, 1) + (0, 1, 0) = (1, 1, 1) \notin U.$$
Logo, U não é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

O conjunto de todos os polinómios reais de grau igual a n:
$$U = \{a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n \in \mathcal{P}_n : a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ a_n \neq 0\},$$
com as operações usuais, não é um espaço linear. Por exemplo: o polinómio nulo $p(t) = \mathbf{0} \notin U$.

5.

$$(0, -1, 1, -1) \in \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \ \text{ e } \ y + z = 0\right\}$$

$$(-2, 1, 1, 0) \in \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\right\}$$

$$(-2, 2, 2, 0) \in \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - z = 0 \ \text{ e } \ x + y + 2w = 0 \ \text{ e } \ y - z + w = 0\right\}$$

(i) Seja
$$U = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \ \text{ e } \ y = -z\right\}.$$
Tem-se
$$U = \{(0, -z, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\}.$$
Atendendo a que
$$(0, -z, z, w) = z(0, -1, 1, 0) + w(0, 0, 0, 1),$$
tem-se
$$U = L\left(\{(0, -1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}\right).$$
O conjunto $\{(0, -1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ gera o subespaço U.

(ii) Seja
$$U = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\right\}.$$
Tem-se
$$U = \{(-y - z - w, y, z, w) : y, z, w \in \mathbb{R}\}.$$
Atendendo a que
$$(-y - z - w, y, z, w) = y(-1, 1, 0, 0) + z(-1, 0, 1, 0) + w(-1, 0, 0, 1),$$
tem-se
$$U = L(\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}).$$
O conjunto $\{(-1, 1, 0, 0), (-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}$ gera o subespaço U.

(iii) Seja
$$U = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - z = 0 \text{ e } x + y + 2w = 0 \text{ e } y - z + w = 0\right\}.$$
Observe-se que
$$U = \mathcal{N}(A), \text{ com } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Tem-se
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = A'.$$
Logo, $U = \mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A')$. Assim,
$$U = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - z = 0 \text{ e } -y + z + 2w = 0 \text{ e } 3w = 0\right\} =$$
$$= \{(-z, z, z, 0) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(-1, 1, 1, 0) : z \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1, 1, 1, 0)\}).$$
O conjunto $\{(-1, 1, 1, 0)\}$ gera o subespaço U.

6. Seja $\mathcal{P}_2$ o espaço linear de todos os polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a 2, com as operações usuais.

(i) Seja $U = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_0 = 0\}$. Tem-se
$$U = \left\{a_1 t + a_2 t^2 : a_1, a_2 \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\left\{t, t^2\right\}\right).$$
Logo, U é subespaço de $\mathcal{P}_2$. O conjunto $\{t, t^2\}$ gera o subespaço U.

(ii) Seja $U = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 = 2a_0 \ e \ a_1 = 0\}$. Tem-se
$$U = \left\{a_0 + 2a_0 t^2 : a_0 \in \mathbb{R}\right\}.$$

Uma vez que
$$a_0 + 2a_0t^2 = a_0(1 + 2t^2),$$
para qualquer $a_0 \in \mathbb{R}$, tem-se:
$$U = L\left(\left\{1 + 2t^2\right\}\right).$$
Logo, U é subespaço de $\mathcal{P}_2$. O conjunto $\{1 + 2t^2\}$ gera o subespaço U.

(iii) Seja $U = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_1 = 1\}$. Por exemplo: o polinómio nulo $p(t) = \mathbf{0} \notin U$. Logo, U não é subespaço de $\mathcal{P}_2$.

(iv) Seja $U = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 = 2\}$. Por exemplo: o polinómio nulo $p(t) = \mathbf{0} \notin U$. Logo, U não é subespaço de $\mathcal{P}_2$.

(v) Seja $U = \{a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 + 2a_0 = 0\}$. Tem-se
$$U = \left\{a_0 + a_1t + (a_1 - 2a_0)\, t^2 : a_0, a_1 \in \mathbb{R}\right\}.$$
Uma vez que
$$a_0 + a_1t + (a_1 - 2a_0)\, t^2 = a_0(1 - 2t^2) + a_1(t + t^2),$$
para quaisquer $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$, tem-se:
$$U = L\left(\left\{1 - 2t^2, t + t^2\right\}\right).$$
Logo, U é subespaço de $\mathcal{P}_2$. O conjunto $\{1 - 2t^2, t + t^2\}$ gera o subespaço U.

7. **(i)** Seja $U = L\left(\{1 - t^2, 1 + t\}\right)$ um subespaço de $\mathcal{P}_2$. Seja $p\,(t) \in U$, com $p\,(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$. Então, existirão $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que
$$p\,(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 = \alpha\left(1 - t^2\right) + \beta\,(1 + t).$$
Tem-se então a matriz aumentada
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & a_1 \\ -1 & 0 & a_2 \end{array}\right] \underset{L_1+L_3 \longrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 1 & a_0 + a_2 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_3 \longrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & a_0 + a_2 - a_1 \end{array}\right].$$
Logo, para que o sistema linear anterior seja possível é preciso que $a_0 + a_2 - a_1 = 0$. Assim,
$$U = \left\{p\,(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_0 + a_2 - a_1 = 0\right\}.$$

(ii) Seja $U = L\left(\{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (-2, 1, -2)\}\right)$. Seja $(x, y, z) \in U$. Então, existirão $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que
$$(x, y, z) = \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 0) + \gamma(-2, 1, -2).$$

Tem-se então a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & -2 & z \end{array}\right] \underset{-L_1+L_3 \longrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & x \\ 0 & 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & z-x \end{array}\right].$$

Assim,

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - x = 0\right\}.$$

Observação extra: $U = L\left(\{(1,0,1),(0,1,0),(-2,1,-2)\}\right) = L\left(\{(1,0,1),(0,1,0)\}\right)$, uma vez que

$$(-2,1,-2) = (-2)(1,0,1) + (0,1,0).$$

(iii) Seja $V = L\left(\{(0,1,0),(-2,1,-2)\}\right)$. Seja $(x,y,z) \in V$. Então, existirão $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z) = \alpha(0,1,0) + \beta(-2,1,-2).$$

Tem-se então a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & -2 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & -2 & z \end{array}\right] \underset{L_1 \longleftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & y \\ 0 & -2 & x \\ 0 & -2 & z \end{array}\right] \underset{-L_2+L_3 \longrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & y \\ 0 & -2 & x \\ 0 & 0 & z-x \end{array}\right].$$

Assim,

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - x = 0\right\}.$$

Observação extra: $V = L\left(\{(0,1,0),(-2,1,-2)\}\right) = L\left(\{(1,0,1),(0,1,0)\}\right)$, uma vez que

$$(-2,1,-2) = (-2)(1,0,1) + (0,1,0) \ \text{ e } \ (1,0,1) = \left(-\frac{1}{2}\right)(-2,1,-2) + \frac{1}{2}(0,1,0).$$

(iv) Seja $W = L\left(\{(1,1,2),(2,1,1)\}\right)$. Seja $(x,y,z) \in V$. Então, existirão $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z) = \alpha(1,1,2) + \beta(2,1,1).$$

Tem-se então a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 1 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ -2L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & y-x \\ 0 & -3 & z-2x \end{array}\right] \underset{-3L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & y-x \\ 0 & 0 & z-3y+x \end{array}\right].$$

Assim,

$$W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - 3y + z = 0\right\}.$$

Observação extra: $W = L\left(\{(3,1,0),(-1,0,1)\}\right) = L\left(\{(1,1,2),(2,1,1)\}\right)$, uma vez que

$$(3,1,0) = 2(2,1,1) + (-1)(1,1,2), \quad (-1,0,1) = (1,1,2) + (-1)(2,1,1)$$

e

$$(1,1,2) = (3,1,0) + 2(-1,0,1), \;\; (2,1,1) = (3,1,0) + (-1,0,1).$$

(v) Seja $U = L\left(\{(1,0,-1,1)\}\right)$. Seja $(x,y,z,w) \in U$. Então, existirá $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x,y,z,w) = \alpha(1,0,-1,1).$$

Tem-se então a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 0 & y \\ -1 & z \\ 1 & w \end{array}\right] \underset{\substack{L_1+L_3\longrightarrow L_3 \\ -L_1+L_4\longrightarrow L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{c|c} 1 & x \\ 0 & y \\ 0 & x+z \\ 0 & w-x \end{array}\right].$$

Assim,

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y = 0 \;\text{ e }\; x+z = 0 \;\text{ e }\; w-x = 0\right\}.$$

(vi) Seja $U = L\left(\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(3,-6,11,-1),(0,0,1,-2)\}\right)$. Como

$$(3,-6,11,-1) = (1,-2,5,-3)+(2,-4,6,2) \quad \text{e} \quad (0,0,1,-2) = \frac{1}{2}(1,-2,5,-3)-\frac{1}{4}(2,-4,6,2)$$

então

$$U = L\left(\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2)\}\right).$$

Seja $(x,y,z,w) \in U$. Então, existirão $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z,w) = \alpha(1,-2,5,-3) + \beta(2,-4,6,2).$$

Tem-se então a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ -2 & -4 & y \\ 5 & 6 & z \\ -3 & 2 & w \end{array}\right] \underset{\substack{2L_1+L_2\longrightarrow L_2 \\ -5L_1+L_3\longrightarrow L_3 \\ 3L_1+L_4\longrightarrow L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & 2x+y \\ 0 & -4 & -5x+z \\ 0 & 8 & 3x+w \end{array}\right] \underset{2L_3+L_4\longrightarrow L_4}{\longrightarrow}.$$

$$\underset{2L_3+L_4\longrightarrow L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & 0 & 2x+y \\ 0 & -4 & -5x+z \\ 0 & 0 & -7x+2z+w \end{array}\right] \underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x \\ 0 & -4 & -5x+z \\ 0 & 0 & 2x+y \\ 0 & 0 & -7x+2z+w \end{array}\right].$$

Assim,

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : 2x+y = 0 \;\text{ e }\; -7x+2z+w = 0\right\}.$$

8. Seja $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ o espaço linear de todas as matrizes do tipo 2×3 com entradas reais.

(i) Seja $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : b = a + c \right\}$. Tem-se

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & a+c & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} : a, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Uma vez que

$$\begin{bmatrix} a & a+c & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

para quaisquer $a, c, d \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$U = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}\right).$$

Logo, U é subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. O conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

gera o subespaço U.

(ii) Seja $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : b < 0 \right\}$. Por exemplo: a matriz nula

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \notin U.$$

Logo, U não é subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

9. Queremos encontrar A tal que $\mathcal{N}(A) = L(\{(2,0,1)\})$. Por definição $\mathcal{N}(A) = \{u \in \mathbb{R}^3 : Au = \mathbf{0}\}$. Seja $(x, y, z) \in L(\{(2,0,1)\})$. Então, existirá $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x, y, z) = \alpha(2, 0, 1).$$

Tem-se então a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{c|c} 2 & x \\ 0 & y \\ 1 & z \end{array}\right] \underset{-\frac{1}{2}L_1 + L_3 \longrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{c|c} 2 & x \\ 0 & y \\ 0 & z - \frac{1}{2}x \end{array}\right].$$

Assim,

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^4 : -x + 2z = 0 \text{ e } y = 0\right\} = \mathcal{N}(A)$$

com

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. Não é possível encontrar A tal que

$$(1,1,1) \in \mathcal{L}(A) \quad \text{e} \quad (1,0,0) \in \mathcal{N}(A),$$

pois se $(1,0,0) \in \mathcal{N}(A)$ então a primeira entrada de todas as linhas de A é 0. Pelo que, nesse caso, não se pode ter $(1,1,1) \in \mathcal{L}(A)$.

11. Seja

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Uma vez que

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \\ 0 & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

com $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, tem-se

$$U = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right).$$

12. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, os vectores $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,0,2)$ e $v_3 = (1,1,0)$. Tem-se

(i) $(3,3,0) = 0(1,2,1) + 0(1,0,2) + 3(1,1,0)$

(ii) $(2,1,5) = 1(1,2,1) + 2(1,0,2) + (-1)(1,1,0)$

(iii) $(-1,2,0) = 2(1,2,1) + (-1)(1,0,2) + (-2)(1,1,0)$

(iv) $(1,1,1) = \frac{1}{3}(1,2,1) + \frac{1}{3}(1,0,2) + \frac{1}{3}(1,1,0)$.

13. Tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & -5 & k \end{array}\right] \underset{\frac{2}{3}L_1+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -11/3 & k+2/3 \end{array}\right] \underset{-\frac{11}{3}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & k+8 \end{array}\right].$$

Logo, -8 é o único valor de k para o qual o vector $u = (1,-2,k) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vectores

$$v = (3,0,-2) \quad \text{e} \quad w = (2,-1,-5).$$

14. **(i)** Seja $U = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$. Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Tem-se

$$(x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1).$$

Logo, U gera $\mathbb{R}^3$.

(ii) Seja $U = \{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$. Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Tem-se

$$(x,y,z) = x(1,1,1) + (y-x)(0,1,1) + (z-y)(0,0,1).$$

Logo, U gera $\mathbb{R}^3$.

(iii) Seja $U = \{(1,1,1),(-1,1,-1),(1,-1,-1),(-1,-1,1)\}$. Seja $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Determinemos os valores dos escalares $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ para os quais se tem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ora a última igualdade é equivalente a

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & -1 & -1 & y \\ 1 & -1 & -1 & 1 & z \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & -2 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & -2 & 2 & z-x \end{array}\right].$$

Logo

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + s \\ \\ \lambda_2 = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + s \\ \\ \lambda_3 = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z + s \\ \\ \lambda_4 = s, \quad s \in \mathbb{R} \end{cases}$$

e assim

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + s\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + s\right) \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z + s\right) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

com $s \in \mathbb{R}$. Logo, U gera $\mathbb{R}^3$.

15. Considere, no espaço linear $\mathcal{P}_2$, os vectores $p_1(t) = 2 + t + 2t^2$, $p_2(t) = -2t + t^2$, $p_3(t) = 2 - 5t + 5t^2$ e $p_4(t) = -2 - 3t - t^2$. O vector

$$q(t) = 2 + t + t^2$$

pertence à expansão linear $L(\{p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)\})$? Podem os vectores $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ e $p_4(t)$ gerar $\mathcal{P}_2$? Tem-se

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -5 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & -1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-\frac{1}{2}L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{2}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]. \quad (**)$$

Atendendo a (**), $q(t) = 2 + t + t^2 \notin L(\{p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)\})$. Logo,

$$\{p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)\} \text{ não pode gerar } \mathcal{P}_2.$$

16. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} \underset{-2L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = A'$$

e

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{-4L_1+L_2\to L_2 \\ -3L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \underset{-2L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B'.$$

Atendendo ao método de eliminação de Gauss:

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A') \;\text{ e }\; \mathcal{L}(B) = \mathcal{L}(B').$$

Além disso, uma vez que

$$(1, -1, -1) = (1, 1, 5) - 2(0, 1, 3),$$

tem-se

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A') = \mathcal{L}(B') = \mathcal{L}(B).$$

Finalmente, como se tem sempre

$$\mathcal{C}(A^T) = \mathcal{L}(A) \;\text{ e }\; \mathcal{L}(B) = \mathcal{C}(B^T),$$

conclui-se que $\mathcal{C}(A^T) = \mathcal{C}(B^T)$.

17.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 - \lambda_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = -1. \end{cases}$$

Logo
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Seja
$$U = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U$. Tem-se $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U$ se e só se existirem escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha A + \beta B + \gamma C.$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha A + \beta B + \gamma C \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 - \lambda_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = b \\ \lambda_1 + \lambda_2 = c \\ \lambda_2 - \lambda_3 = d \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 2 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & -1 & d \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 1 & -1 & d \end{array}\right] \underset{\substack{-L_3+L_4\to L_4 \\ \frac{1}{2}L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-L_3+L_4\to L_4 \\ \frac{1}{2}L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & d+\frac{1}{2}(b+a)-c \end{array}\right] \underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & d+\frac{1}{2}(b+a)-c. \end{array}\right]$$

Logo, para que o sistema linear anterior seja possível é necessário que se tenha
$$d + \frac{1}{2}(b+a) - c = 0.$$

Deste modo podemos escrever
$$U = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : d + \frac{1}{2}(b+a) - c = 0\right\}$$

e assim, sendo
$$V = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : d + \frac{1}{2}(b+a) - c \neq 0\right\},$$

tem-se
$$\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U \oplus V.$$

Ou seja, qualquer vector de V que não seja o vector nulo, esse vector não pertence a U. Por exemplo
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \notin U = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

18. Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços:

$$U = L\left(\{(1,-1,1),(0,1,1)\}\right) \quad \text{e} \quad V = L\left(\{(1,1,2),(-1,1,1)\}\right).$$

Logo,

$$U + V = L\left(U \cup V\right) = L\left(\{(1,-1,1),(0,1,1),(1,1,2),(-1,1,1)\}\right).$$

Facilmente se verifica, por exemplo, que:

$$(1,1,2) = 2(0,1,1) + \frac{1}{2}(1,-1,1) - \frac{1}{2}(-1,1,1).$$

Logo

$$U + V = L\left(\{u_1,u_2,u_3\}\right)$$

com (por exemplo) $u_1 = (0,1,1), u_2 = (1,-1,1)$ e $u_3 = (-1,1,1)$.

Seja $(x,y,z) \in U$. Tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & x \\ -1 & 1 & | & y \\ 1 & 1 & | & z \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & x \\ 0 & 1 & | & x+y \\ 0 & 1 & | & z-x \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & x \\ 0 & 1 & | & x+y \\ 0 & 0 & | & z-2x-y \end{bmatrix}.$$

Logo

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - 2x - y = 0\right\}.$$

Seja $(x,y,z) \in V$. Tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & | & x \\ 1 & 1 & | & y \\ 2 & 1 & | & z \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ -2L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & x \\ 0 & 2 & | & y-x \\ 0 & 3 & | & z-2x \end{bmatrix} \underset{-\frac{3}{2}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & | & x \\ 0 & 2 & | & y-x \\ 0 & 0 & | & z-\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}x \end{bmatrix}.$$

Logo

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2z - 3y - x = 0\right\}.$$

Deste modo

$$U \cap V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - 2x - y = 0 \ \text{ e } \ 2z - 3y - x = 0\right\} = L\left(\{(1,3,5)\}\right)$$

e como tal, $U \cap V = L\left(\{v\}\right)$, com (por exemplo) $v = (1,3,5)$.

19. Sejam

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \ \text{ e } \ x + y = 0\right\}, \quad V = L\left(\{(1,1,1)\}\right).$$

Tem-se $(1,1,1) \notin U$ pois $1 + 1 - 1 \neq 0$. Logo $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$.

Por outro lado, como

$$U = \left\{(-y,y,0) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\{(-1,1,0)\}\right),$$

tem-se

$$U + V = L\left(\{u_1,u_2\}\right)$$

com (por exemplo) $u_1 = (-1, 1, 0)$ e $u_2 = (1, 1, 1)$.

20. Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços:

$$U = L\left(\{(1,0,1),(-1,1,2)\}\right) \quad \text{e} \quad V = \{(x,y,z) : x+y+3z = 0\}.$$

Seja $v \in U$, então

$$v = \alpha(1,0,1) + \beta(-1,1,2) = (\alpha - \beta, \beta, \alpha + 2\beta),$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Para que v esteja também em V é preciso que:

$$\alpha - \beta + \beta + 3\left(\alpha + 2\beta\right) = 0.$$

isto é,

$$4\alpha + 6\beta = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha = -\frac{3}{2}\beta.$$

Assim,

$$v = \alpha(1,0,1) + \beta(-1,1,2) = \left(-\frac{5}{2}\beta, \beta, \frac{1}{2}\beta\right) = \beta\left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right).$$

Logo,

$$U \cap V = \left\{\beta\left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) : \beta \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\left\{\left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)\right\}\right)$$

e como tal, $U \cap V = L\left(\{v\}\right)$, com (por exemplo) $v = \left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$.

Tem-se

$$V = L\left(\{(-1,1,0),(-3,0,1)\}\right).$$

Logo,

$$U + V = L\left(U \cup V\right) = L\left(\{(1,0,1),(-1,1,2),(-1,1,0),(-3,0,1)\}\right).$$

Facilmente se verifica, por exemplo, que:

$$(-3,0,1) = -3(1,0,1) + 2(-1,1,2) - 2(-1,1,0)$$

Logo

$$U + V = L\left(\{u_1, u_2, u_3\}\right)$$

com (por exemplo) $u_1 = (1,0,1), u_2 = (-1,1,2)$ e $u_3 = (-1,1,0)$.

21. Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços:

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\right\} \quad \text{e} \quad V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\right\}.$$

Tem-se $U = L\left(\{(1,1,1)\}\right)$ e $V = L\left(\{(0,1,0),(0,0,1)\}\right)$.

Como

$$(1,1,1) \notin L\left(\{(0,1,0),(0,0,1)\}\right) = V$$

então

$$U \cap V = \{\mathbf{0}\} \quad \text{e} \quad U + V = L\left(\{u_1, u_2, u_3\}\right)$$

com (por exemplo) $u_1 = (1, 1, 1), u_2 = (0, 1, 0)$ e $u_3 = (0, 0, 1)$.

22. Em $\mathcal{P}_2$, considere os subespaços:

$$U = L\left(\left\{1+t, 1-t^2\right\}\right) \quad \text{e} \quad V = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 + a_0 = 0\right\}.$$

Seja $p(t) \in U$. Então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = \alpha(1+t) + \beta\left(1-t^2\right).$$

Atendendo a

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & a_2 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & -1 & a_1 - a_0 \\ 0 & -1 & a_2 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & -1 & a_1 - a_0 \\ 0 & 0 & a_2 - a_1 + a_0 \end{array}\right].$$

Logo, tem-se

$$U = V$$

pelo que

$$U + V = U = V \quad \text{e} \quad U \cap V = U = V.$$

Assim,

$$U + V = U \cap V = L\left(\{u_1, u_2\}\right)$$

com (por exemplo) $u_1 = 1 + t$ e $u_2 = 1 - t^2$.

23. Como

$$p(1) = 0 \Leftrightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 0$$

então

$$U = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : a_0 + a_1 + a_2 = 0\} = L(\{-1+t, -1+t^2\}).$$

Por outro lado, atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a_0 \\ -1 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & 1 & a_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & a_0 \\ 0 & 1 & -1 & a_0 + a_1 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 + a_1 + a_2 \end{array}\right]$$

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in V = L(\{1-t, t-t^2, -1+t^2\}) \Leftrightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 0.$$

Logo $U = V$ e assim

$$U + V = U = V \quad \text{e} \quad U \cap V = U = V.$$

Isto é,

$$U + V = U \cap V = L\left(\{u_1, u_2\}\right)$$

com (por exemplo) $u_1 = -1 + t$ e $u_2 = -1 + t^2$.

24. Em $\mathcal{P}_3$, considere os subespaços:

$$U = L\left(\left\{1+t, 1-t^3\right\}\right) \quad \text{e} \quad V = L\left(\left\{1+t+t^2, t-t^3, 1+t+t^3\right\}\right).$$

Logo

$$U+V=L\left(U\cup V\right)=L\left(\left\{1+t,1-t^3,1+t+t^2,t-t^3,1+t+t^3\right\}\right).$$

Como

$$1+t+t^3=\frac{3}{2}\left(1+t\right)-\frac{1}{2}\left(1-t^3\right)+0\left(1+t+t^2\right)-\frac{1}{2}\left(t-t^3\right)$$

então

$$U+V=L\left(\{u_1,u_2,u_3,u_4\}\right)$$

com (por exemplo) $u_1=1+t$, $u_2=1-t^3$, $u_3=1+t+t^2$ e $u_4=t-t^3$.

Determinemos $U\cap V$. Seja

$$p\left(t\right)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\in U.$$

Tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & a_3 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & -1 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & a_3 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & -1 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3+a_0-a_1 \end{array}\right].$$

Logo

$$U=\left\{a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\in\mathcal{P}_3:a_2=0\ \text{ e }\ a_3+a_0-a_1=0\right\}.$$

Seja

$$q\left(t\right)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\in V.$$

Tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 1 & 1 & 1 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & 1 & a_3 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & -1 & a_2-a_0 \\ 0 & -1 & 1 & a_3 \end{array}\right] \underset{L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow}$$

$$\underset{L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & -1 & a_2-a_0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1-a_0+a_3 \end{array}\right] \underset{L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & -1 & a_2-a_0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1+a_2-2a_0+a_3 \end{array}\right].$$

Logo

$$V=\left\{a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\in\mathcal{P}_3:a_1+a_2-2a_0+a_3=0\right\}.$$

Deste modo

$$U\cap V=\left\{a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\in\mathcal{P}_3:a_2=0\ \text{ e }\ a_0-a_1+a_3=0\ \text{ e }\ -2a_0+a_1+a_2+a_3=0\right\}=$$

$$=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\in\mathcal{P}_3:(a_0,a_1,a_2,a_3)\in\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{2L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$U\cap V = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathcal{P}_3 : a_0 - a_1 + a_3 = 0 \;\text{ e }\; -a_1 + a_2 + 3a_3 = 0 \;\text{ e }\; a_2 = 0\right\} =$$

$$= \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \in \mathcal{P}_3 : a_0 = 2a_3 \;\text{ e }\; a_1 = 3a_3 \;\text{ e }\; a_2 = 0\right\} =$$

$$= \left\{2a_3 + 3a_3 t + a_3 t^3 \in \mathcal{P}_3 : a_3 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{a_3\left(2 + 3t + t^3\right) \in \mathcal{P}_3 : a_3 \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\left\{2 + 3t + t^3\right\}\right).$$

Basta ter, por exemplo, $W = L(\{t^2, t^3\})$, uma vez que, neste caso, $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ e $U + W = \mathcal{P}_3$. Logo $U \oplus W = \mathcal{P}_3$.

25. Atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ -1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & w \end{array}\right] \underset{\cdots}{\to} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & x+z \\ 0 & 0 & 1 & w \end{array}\right],$$

$(x, y, z, w) \in U \Leftrightarrow (x+z = 0)$. Logo $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + z = 0\} = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right)$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{1\times 4}(\mathbb{R})$.

b) Atendendo a **a)** $U = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + z = 0\}$. Considerando $(x, y, z, w) \notin U$ por exemplo $(1, 0, 0, 0)$ tem-se

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & -1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & w \end{array}\right] \underset{\cdots}{\to} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & -1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 & w \end{array}\right]$$

sistema possível para quaiquer $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ logo $\mathbb{R}^4 \subset U + L(\{u\})$. A inclusão $U + L(\{u\}) \subset \mathbb{R}^4$ decorre de se ter $U \subset \mathbb{R}^4$ e $L(\{u\}) \subset \mathbb{R}^4$. Assim: $U + L(\{u\}) = \mathbb{R}^4$.

c) Atendendo a **b)** tem-se

$$U \cap V = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + z = 0 \quad\text{e}\quad y + w = 0\} =$$

$$= \{(-z, -w, z, w) : z, w \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \{z(-1, 0, 1, 0) + w(0, -1, 0, 1) : z, w \in \mathbb{R}\} =$$

$$= L(\{(-1, 0, 1, 0), (0, -1, 0, 1)\}).$$

Assim, existem $w_1 = (-1, 0, 1, 0), w_2 = (0, -1, 0, 1)$ tais que $U \cap V = L(\{w_1, w_2\})$.

26. Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(\alpha_1,\beta_1,3),(\alpha_2,\beta_2,9)\}$ como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss. Se $\alpha_1 \neq 0$, tem-se

$$A=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\\ 3 & 9\end{bmatrix}\underset{\substack{-\frac{\beta_1}{\alpha_1}L_1+L_2\to L_2\\ -\frac{3}{\alpha_1}L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ & \\ 0 & -\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\alpha_2+\beta_2\\ & \\ 0 & -\dfrac{3}{\alpha_1}\alpha_2+9\end{bmatrix}=A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto $\{(\alpha_1,\beta_1,3),(\alpha_2,\beta_2,9)\}$ é linearmente independente se $\alpha_1 \neq 0$ e $\left(\beta_2 \neq \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}\alpha_2 \text{ ou } \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\neq 3\right)$.
Se $\alpha_1 = 0$, tem-se

$$\begin{bmatrix}0 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\\ 3 & 9\end{bmatrix}\underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}3 & 9\\ \beta_1 & \beta_2\\ 0 & \alpha_2\end{bmatrix}\underset{-\frac{\beta_1}{3}L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}3 & 9\\ 0 & -3\beta_1+\beta_2\\ 0 & \alpha_2\end{bmatrix}.$$

Logo, o conjunto $\{(\alpha_1,\beta_1,3),(\alpha_2,\beta_2,9)\}$ é linearmente independente se $\alpha_1 = 0$ e ($\beta_2 \neq 3\beta_1$ ou $\alpha_2 \neq 0$). Assim, o conjunto $\{(\alpha_1,\beta_1,3),(\alpha_2,\beta_2,9)\}$ é linearmente independente se e só se

$$\left(\alpha_1\neq 0 \;\text{ e }\; \left(\beta_2\neq\frac{\beta_1}{\alpha_1}\alpha_2 \;\text{ ou }\; \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\neq 3\right)\right) \;\text{ ou }\; \left(\alpha_1=0 \;\text{ e }\; (\beta_2\neq 3\beta_1 \;\text{ ou }\; \alpha_2\neq 0)\right).$$

27. **(i)** Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(4,2,1),(2,6,-5),(1,-2,3)\}$ como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 1\\ 2 & 6 & -2\\ 1 & -5 & 3\end{bmatrix}\underset{L_1\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1 & -5 & 3\\ 2 & 6 & -2\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}\underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2\\ -4L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow}$$
$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -5 & 3\\ 0 & 16 & -8\\ 0 & 22 & -11\end{bmatrix}\underset{\substack{\frac{1}{8}L_2\to L_2\\ \frac{1}{11}L_3\to L_3}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1 & -5 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}\underset{-L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1 & -5 & 3\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto $\{(4,2,1),(2,6,-5),(1,-2,3)\}$ é linearmente dependente, mas o conjunto $\{(4,2,1),(2,6,-5)\}$ é linearmente independente. Procuremos então $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tais que

$$(1,-2,3)=\alpha(4,2,1)+\beta(2,6,-5).$$

Atendendo ao que já se fez e considerando a 3^a coluna como o termo independente do sistema, tem-se

$$\begin{cases} 4\alpha + 2\beta = 1 \\ \\ 2\alpha + 6\beta = -2 \\ \\ \alpha - 5\beta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - 5\beta = 3 \\ \\ 2\beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \\ \beta = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Pelo que

$$(1, -2, 3) = \frac{1}{2}(4, 2, 1) - \frac{1}{2}(2, 6, -5).$$

(ii) Podemos colocar os vectores do conjunto

$$\{(1, 2, -1), (3, 2, 5)\}$$

como colunas de uma matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \underset{2L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A'$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto $\{(1, 2, -1), (3, 2, 5)\}$ é linearmente independente.

(iii) Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ -3L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \underset{-2L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ é linearmente independente.

Observação extra: encontrámos três vectores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, então o conjunto $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^3$, sem ser preciso verificar se gera $\mathbb{R}^3$.

(iv) O conjunto $\{(1, 0, -1), (0, 0, 0), (0, 1, 1)\}$ contém o vector nulo, logo é linearmente dependente. Facilmente se vê que $\{(1, 0, -1), (0, 1, 1)\}$ é linearmente independente. Facilmente também se vê que

$$(0, 0, 0) = 0(1, 0, -1) + 0(0, 1, 1).$$

(v) Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, então qualquer conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ com mais do que três vectores é linearmente dependente. O conjunto

$$\{(1, 1, 0), (0, 2, 3), (1, 2, 3), (x, y, z)\}$$

é formado por quatro vectores de $\mathbb{R}^3$, logo é linearmente dependente para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Resolução alternativa para verificar a dependência linear: Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(x,y,z)\}$ como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 2 & 2 & y \\ 0 & 3 & 3 & z \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & y-x \\ 0 & 3 & 3 & z \end{bmatrix} \underset{-\frac{3}{2}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-\frac{3}{2}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 2 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} & z-\frac{3}{2}(y-x) \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3),(x,y,z)\}$$

é linearmente dependente para quaisquer $x, y, z \in \mathbb{R}$, mas o conjunto $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3)\}$ é linearmente independente.

Observação extra: encontrámos três vectores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, então o conjunto $\{(1,1,0),(0,2,3),(1,2,3)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^3$, sem ser preciso verificar se gera $\mathbb{R}^3$.

Procuremos então $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,2,3) + \gamma(1,2,3).$$

Atendendo ao que já se fez e considerando a 4^a coluna como o termo independente do sistema, tem-se

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ \alpha + 2\beta + \gamma = y \\ 3\beta + 3\gamma = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \gamma = x \\ 2\beta + \gamma = y - x \\ \frac{3}{2}\gamma = z - \frac{3}{2}(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = y - \frac{2}{3}z \\ \beta = (y-x) - \frac{1}{3}z \\ \gamma = \frac{2}{3}z - y + x. \end{cases}$$

Pelo que

$$(x,y,z) = \left(y - \frac{2}{3}z\right)(1,1,0) + \left((y-x) - \frac{1}{3}z\right)(0,2,3) + \left(\frac{2}{3}z - y + x\right)(1,2,3).$$

28. Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(a^2,0,1),(0,a,2),(1,0,1)\}$ como colunas de uma A matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss.

$$A = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ a^2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{-a^2 L_1 + L_3 \to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\xrightarrow[-a^2L_1+L_3\to L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & -2a^2 & 1-a^2 \end{bmatrix} \xrightarrow[2aL_2+L_3\to L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a^2 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$S_a = \left\{(a^2,0,1),(0,a,2),(1,0,1)\right\}$$

é linearmente independente se e só se $a \notin \{-1,0,1\}$. Logo, uma vez que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ e S_a tem 3 vectores, S_a será uma base de $\mathbb{R}^3$ se e só se $a \notin \{-1,0,1\}$.

29. Sejam $U = L(\{(1,1,0,0),(0,1,1,0)\})$ e $V_k = L(\{(2,k,1,0),(0,0,0,1)\})$ subespaços de $\mathbb{R}^4$. Determine os valores de k para os quais $\dim(U \cap V_k) = 1$. Coloquemos os vectores geradores de U e de V como colunas da matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2\leftrightarrow L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-L_1+L_3\to L_3]{}$$

$$\xrightarrow[-L_1+L_3\to L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & k-2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-L_2+L_3\to L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k-3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que $U + V_k = L(U \cup V_k)$. Como

$$\dim(U \cap V_k) = \dim U + \dim V_k - \dim(U+V_k) = 2 + 2 - \dim(U+V_k) = 4 - \dim(U+V_k)$$

e

$$\dim(U+V_k) = \begin{cases} 3 & \text{se } k = 3 \\ 4 & \text{se } k \neq 3 \end{cases}$$

então $\dim(U \cap V_k) = 1$ se e só se $k = 3$.

30. **(i)** Seja

$$S = \left\{\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t, \cos 2t\right\}.$$

O conjunto S é linearmente dependente, pois:

$$\cos 2t = \cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t.$$

Mas, o conjunto

$$S' = \left\{\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t\right\}$$

é linearmente independente pois se tivermos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda \cos^2 t + \mu \operatorname{sen}^2 t = 0,$$

para todo o $t \in \mathbb{R}$, então se fizermos $t = \frac{\pi}{2}$ obtemos $\mu = 0$ e a seguir se fizermos $t = 0$ obtemos $\lambda = 0$. Logo, $\lambda = \mu = 0$. Pelo que, o conjunto $S' = \{\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t\}$ é uma base de $L(S)$, pois gera $L(S)$ e é linearmente independente. E então,

$$\dim L(S) = 2.$$

(ii) Seja

$$S = \left\{2, \operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t\right\}.$$

O conjunto S é linearmente dependente, pois:

$$2 = 2\cos^2 t + 2\operatorname{sen}^2 t.$$

Mas, o conjunto

$$S' = \left\{\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t\right\}$$

é linearmente independente pois se tivermos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda \cos^2 t + \mu \operatorname{sen}^2 t = 0,$$

para todo o $t \in \mathbb{R}$, então se fizermos $t = \frac{\pi}{2}$ obtemos $\mu = 0$ e a seguir se fizermos $t = 0$ obtemos $\lambda = 0$. Logo, $\lambda = \mu = 0$. Pelo que, o conjunto $S' = \{\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t\}$ é uma base de $L(S)$, pois gera $L(S)$ e é linearmente independente. E então,

$$\dim L(S) = 2.$$

(iii) Seja

$$S = \left\{e^t, e^{-t}, \cosh t\right\}.$$

O conjunto S é linearmente dependente, pois:

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

Mas, o conjunto

$$S' = \left\{e^t, e^{-t}\right\}$$

é linearmente independente pois se tivermos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda e^t + \mu e^{-t} = 0,$$

para todo o $t \in \mathbb{R}$, então se fizermos $t = 0$ obtemos $\lambda + \mu = 0$ e a seguir se fizermos $t = 1$ obtemos $\lambda e^1 + \mu e^{-1} = 0$. Logo, $\lambda = \mu = 0$. Pelo que, o conjunto $S' = \{e^t, e^{-t}\}$ é uma base de $L(S)$, pois gera $L(S)$ e é linearmente independente. E então,

$$\dim L(S) = 2.$$

(iv) Seja

$$S = \left\{1, t, t^2, (t+1)^2\right\}.$$

O conjunto S é linearmente dependente, pois:

$$\dim \mathcal{P}_2 = 3 \text{ e } S \text{ tem 4 vectores.}$$

Mas, o conjunto

$$S' = \{1, t, t^2\}$$

é linearmente independente pois trata-se da base canónica de $\mathcal{P}_2$. Logo,

$$L(S) = \mathcal{P}_2 \text{ e } \dim L(S) = \dim \mathcal{P}_2 = 3.$$

31. Seja V o espaço linear de todas as funções reais de variável real. Sejam $f, g, h \in V$, com $f(t) = \operatorname{sen} t$, $g(t) = \cos t$ e $h(t) = t$. Vejamos que o conjunto $\{f, g, h\}$ é linearmente independente. Sejam $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha f + \beta g + \gamma h = \mathbf{0}.$$

Note que

$$\begin{aligned} \alpha f + \beta g + \gamma h &= \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha f(t) + \beta g(t) + \gamma h(t) = 0, \quad \text{para todo o } t \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \alpha \operatorname{sen} t + \beta \cos t + \gamma t = 0, \quad \text{para todo o } t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Para $t = 0$, $t = \pi$, $t = \dfrac{\pi}{2}$ tem-se respectivamente as seguintes equações

$$\begin{cases} \alpha \operatorname{sen} 0 + \beta \cos 0 + \gamma 0 = 0 \\ \\ \alpha \operatorname{sen} \pi + \beta \cos \pi + \gamma \pi = 0 \\ \\ \alpha \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{2} + \beta \cos \dfrac{\pi}{2} + \gamma \dfrac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \\ -\beta + \gamma \pi = 0 \\ \\ \alpha + \gamma \dfrac{\pi}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha = 0. \end{cases}$$

Logo $\alpha = \beta = \gamma = 0$, e assim o conjunto $\{f, g, h\}$ é linearmente independente.

Observação. Como $\{f, g\} \subset \{f, g, h\}$, as funções $\operatorname{sen} t$ e $\cos t$ são linearmente independentes.

32. **(i)** Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(1, 3), (1, -1)\}$ como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \underset{-3L_1 + L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto formado pelos vectores das colunas 1 e 2 da matriz A:

$$\{(1, 3), (1, -1)\}$$

é linearmente independente. Temos assim, dois vectores de $\mathbb{R}^2$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^2$ é 2, então o conjunto $\mathcal{B} = \{(1,3),(1,-1)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^2$. (Não foi preciso verificar se $\mathcal{B}$ gera $\mathbb{R}^2$). Isto é, $\mathcal{B}$ é base de $L(\mathcal{B}) = \mathbb{R}^2$ e $\dim L(\mathcal{B}) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

Determinemos agora as coordenadas do vector $(0,-1)$ em relação à base

$$\mathcal{B} = \{(1,3),(1,-1)\}$$

de $\mathbb{R}^2$. Isto é, queremos encontrar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(0,-1) = \alpha(1,3) + \beta(1,-1).$$

Formando a matriz aumentada do sistema, tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{array}\right] \underset{-3L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \end{array}\right].$$

Logo,

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \\ -4\beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{4} \\ \\ \beta = \frac{1}{4} \end{cases}$$

e assim,

$$(0,-1) = -\frac{1}{4}(1,3) + \frac{1}{4}(1,-1).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, o vector cujas coordenadas são $(0,-1)$ nessa base, é dado por:

$$0(1,3) + (-1)(1,-1) = (-1,1).$$

(ii) O conjunto $S = \{(0,0),(1,2)\}$ contém o vector nulo, logo o conjunto é linearmente dependente, pelo que não pode ser base de $\mathbb{R}^2$. No entanto, $S' = \{(1,2)\}$ é linearmente independente e S' é base de $L(S') = L(S)$. Logo, $\dim L(S) = 1$.

(iii) O conjunto $S = \{(2,4)\}$ não pode ser base de $\mathbb{R}^2$ uma vez que tem só um vector e qualquer base de $\mathbb{R}^2$ tem sempre dois vectores (pois $\dim \mathbb{R}^2 = 2$). No entanto, $S = \{(2,4)\}$ é linearmente independente e S é base de $L(S)$. Logo, $\dim L(S) = 1$.

(iv) Facilmente se vê que o conjunto $\mathcal{B} = \{(-5,0),(0,2)\}$ é linearmente independente. Temos assim, dois vectores de $\mathbb{R}^2$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^2$ é 2, então o conjunto $\mathcal{B} = \{(-5,0),(0,2)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^2$. (Não foi preciso verificar se $\mathcal{B}$ gera $\mathbb{R}^2$).

Determinemos agora as coordenadas do vector $(0,-1)$ em relação à base

$$\mathcal{B} = \{(-5,0),(0,2)\}$$

de $\mathbb{R}^2$. Isto é, queremos encontrar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(0,-1) = \alpha(-5,0) + \beta(0,2).$$

Facilmente se vê que $\beta = -\frac{1}{2}$ e $\alpha = 0$. Isto é,

$$(0, -1) = 0(-5, 0) + \left(-\frac{1}{2}\right)(0, 2).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, o vector cujas coordenadas são $(0, -1)$ nessa base, é dado por:

$$0(-5, 0) + (-1)(0, 2) = (0, -2).$$

(v) Como a dimensão de $\mathbb{R}^2$ é 2, então qualquer conjunto de vectores de $\mathbb{R}^2$ com mais do que 2 vectores é linearmente dependente. O conjunto $S = \{(1, 2), (2, -3), (3, 2)\}$ é formado por três vectores de $\mathbb{R}^2$, logo é linearmente dependente e como tal não pode ser uma base de $\mathbb{R}^2$. No entanto, podemos colocar os vectores do conjunto $S = \{(1, 2), (2, -3), (3, 2)\}$ como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix} \underset{-2L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -7 & -4 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto formado pelos vectores das colunas 1 e 2 da matriz A:

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (2, -3)\}$$

é linearmente independente. Temos assim, dois vectores de $\mathbb{R}^2$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^2$ é 2, então o conjunto $\mathcal{B} = \{(1, 2), (2, -3)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^2$. (Não foi preciso verificar se $\mathcal{B}$ gera $\mathbb{R}^2$).

Determinemos agora as coordenadas do vector $(0, -1)$ em relação à base

$$\mathcal{B} = \{(1, 2), (2, -3)\}$$

de $\mathbb{R}^2$. Isto é, queremos encontrar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(0, -1) = \alpha \{(1, 2) + \beta(2, -3)\}.$$

Formando a matriz aumentada do sistema, tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{array}\right] \underset{-2L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -1 \end{array}\right].$$

Logo,

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \\ -7\beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{2}{7} \\ \\ \beta = \frac{1}{7} \end{cases}$$

e assim,

$$(0, -1) = -\frac{2}{7}(1, 2) + \frac{1}{7}(2, -3).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, o vector cujas coordenadas são $(0, -1)$ nessa base, é dado por:

$$0(1, 2) + (-1)(2, -3) = (-2, 3).$$

(vi) $B_c^2 = \{(1,0),(0,1)\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^2$. As coordenadas do vector $(0,-1)$ em relação à base B_c^2 são precisamente 0 e -1. Ainda em relação à base B_c^2, o vector cujas coordenadas nessa base são $(0,-1)$ é precisamente o vector $(0,-1)$.

33. **(i)** O conjunto $\{(1,2,3),(0,0,0),(0,1,2)\}$ contém o vector nulo, logo o conjunto é linearmente dependente, pelo que não pode ser base. Mas,

$$L(\{(1,2,3),(0,0,0),(0,1,2)\}) = L(\{(1,2,3),(0,1,2)\})$$

e facilmente se vê que o conjunto $\{(1,2,3),(0,1,2)\}$ é linearmente independente. Logo,

$$\dim L(\{(1,2,3),(0,0,0),(0,1,2)\}) = 2$$

e o conjunto $\{(1,2,3),(0,1,2)\}$ é uma base de $L(\{(1,2,3),(0,0,0),(0,1,2)\})$.

(ii) Facilmente se vê que o conjunto $\{(1,2,0),(0,1,-1)\}$ é linearmente independente. Logo, o conjunto $\{(1,2,0),(0,1,-1)\}$ é uma base de $L(\{(1,2,0),(0,1,-1)\})$ e

$$\dim L(\{(1,2,0),(0,1,-1)\}) = 2.$$

(iii) Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(3,2,2),(-1,2,1),(0,1,0)\}$ como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{-\frac{2}{3}L_1+L_2\to L_2 \\ -\frac{2}{3}L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 8/3 & 1 \\ 0 & 5/3 & 0 \end{bmatrix} \underset{-\frac{5}{8}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 8/3 & 1 \\ 0 & 0 & -5/8 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto $\{(3,2,2),(-1,2,1),(0,1,0)\}$ é linearmente independente. Temos assim, três vectores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, então o conjunto $\{(3,2,2),(-1,2,1),(0,1,0)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^3$. Vamos agora escrever o vector $(-1,1,-2)$ como combinação linear dos vectores desta base. Isto é, procuremos $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(-1,1,-2) = \alpha(3,2,2) + \beta(-1,2,1) + \gamma(0,1,0).$$

Temos então

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \underset{\substack{-\frac{2}{3}L_1+L_2\to L_2 \\ -\frac{2}{3}L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 8/3 & 1 & 5/3 \\ 0 & 5/3 & 0 & -4/3 \end{array}\right] \underset{-\frac{5}{8}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 8/3 & 1 & 5/3 \\ 0 & 0 & -5/8 & -19/8 \end{array}\right].$$

Logo,

$$\begin{cases} 3\alpha - \beta = -1 \\ \frac{8}{3}\beta + \gamma = \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{8}\gamma = -\frac{19}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{3}{5} \\ \beta = -\frac{4}{5} \\ \gamma = \frac{19}{5}. \end{cases}$$

Pelo que
$$(-1,1,-2)=\left(-\frac{3}{5}\right)(3,2,2)+\left(-\frac{4}{5}\right)(-1,2,1)+\frac{19}{5}(0,1,0).$$
Finalmente e ainda em relação à base $\{(3,2,2),(-1,2,1),(0,1,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$, o vector cujas coordenadas são $(-1,1,-2)$ nessa base, é dado por:
$$(-1)(3,2,2)+(-1,2,1)+(-2)(0,1,0)=(-4,-2,-1).$$

(iv) Facilmente se vê que o conjunto $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ é linearmente independente. Temos então três vectores de $\mathbb{R}^3$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, então o conjunto $\{(1,1,1),(0,1,1),(0,0,1)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^3$. Vamos agora escrever o vector $(-1,1,-2)$ como combinação linear dos vectores desta base. Isto é, procuremos $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tais que
$$(-1,1,-2)=\alpha(1,1,1)+\beta(0,1,1)+\gamma(0,0,1).$$
Temos então:
$$\begin{cases}\alpha=-1\\ \alpha+\beta=1\\ \alpha+\beta+\gamma=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=2\\ \gamma=-3.\end{cases}$$
Pelo que
$$(-1,1,-2)=(-1)(1,1,1)+2(0,1,1)+(-3)(0,0,1).$$
Finalmente e ainda em relação à base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$, o vector cujas coordenadas são $(-1,1,-2)$ nessa base, é dado por:
$$(-1)(1,1,1)+(0,1,1)+(-2)(0,0,1)=(-1,0,-2).$$

(v) Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, então qualquer conjunto de vectores de $\mathbb{R}^3$ com mais do que três vectores é linearmente dependente. O conjunto
$$\{(1,1,-1),(2,3,4),(4,1,-1),(0,1,-1)\}$$
é formado por quatro vectores de $\mathbb{R}^3$, logo é linearmente dependente. Vamos procurar o número máximo de vectores linearmente independentes que, em conjunto, geram
$$L\left(\{(1,1,-1),(2,3,4),(4,1,-1),(0,1,-1)\}\right).$$
Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(1,1,-1),(2,3,4),(4,1,-1),(0,1,-1)\}$ como linhas de uma A matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:
$$A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&3&4\\4&1&-1\\0&1&-1\end{bmatrix}\underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2\\-4L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&-1\\0&1&6\\0&-3&3\\0&1&-1\end{bmatrix}\underset{\substack{3L_2+L_3\to L_3\\-L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\xrightarrow[\substack{3L_2+L_3\to L_3 \\ -L_2+L_4\to L_4}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\frac{1}{21}L_3\to L_3 \\ \frac{1}{7}L_4\to L_4}]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3+L_4\to L_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As linhas não nulas da matriz em escada A' são linearmente independentes. Logo, o conjunto $\{(1,1,-1),(0,1,6),(0,0,1)\}$ é formado por três vectores de $\mathbb{R}^3$, linearmente independentes. Atendendo a que a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é 3, o conjunto

$$\{(1,1,-1),(0,1,6),(0,0,1)\}$$

é desde logo uma base de $\mathbb{R}^3$. Uma vez que $\mathcal{L}(A)=\mathcal{L}(A')$ temos então:

$$L\left(\{(1,1,-1),(2,3,4),(4,1,-1),(0,1,-1)\}\right) = L\left(\{(1,1,-1),(0,1,6),(0,0,1)\}\right) = \mathbb{R}^3.$$

Logo,

$$\dim L\left(\{(1,1,-1),(2,3,4),(4,1,-1),(0,1,-1)\}\right) = 3.$$

Vamos agora escrever o vector $(-1,1,-2)$ como combinação linear dos vectores da base

$$\{(1,1,-1),(0,1,6),(0,0,1)\}.$$

Isto é, procuremos $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tais que

$$(-1,1,-2) = \alpha(1,1,-1) + \beta(0,1,6) + \gamma(0,0,1).$$

Temos então:

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha+\beta = 1 \\ -\alpha+6\beta+\gamma = -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \\ \gamma = -15. \end{cases}$$

Pelo que

$$(-1,1,-2) = (-1)(1,1,-1) + 2(0,1,6) + (-15)(0,0,1).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\{(1,1,-1),(0,1,6),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$, o vector cujas coordenadas são $(-1,1,-2)$ nessa base, é dado por:

$$(-1)(1,1,-1) + (0,1,6) + (-2)(0,0,1) = (-1,0,5).$$

(vi) $B_c^3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^3$. As coordenadas do vector $(-1,1,-2)$ em relação à base B_c^3 são precisamente $-1, 1$ e -2. Ainda em relação à base B_c^3, o vector cujas coordenadas nessa base são $(-1,1,-2)$ é precisamente o vector $(-1,1,-2)$.

34. (i) Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,1,1,1),(0,1,1,1)\}$ como colunas de uma matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[-L_1+L_4\to L_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, o conjunto $\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,1,1,1),(0,1,1,1)\}$ é linearmente independente. Temos assim, quatro vectores de $\mathbb{R}^4$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^4$ é 4, então o conjunto $\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,1,1,1),(0,1,1,1)\}$ é desde logo uma base de $\mathbb{R}^4$ e

$$\dim L\left(\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,1,1,1),(0,1,1,1)\}\right) = \dim \mathbb{R}^4 = 4.$$

(ii) Podemos colocar os vectores do conjunto $\{(1,-1,0,2),(3,-1,2,1),(1,0,0,1)\}$ como colunas de uma matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_2\to L_2 \\ -2L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ \frac{5}{2}L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ \frac{5}{2}L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \underset{\frac{3}{2}L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, o conjunto $\{(1,-1,0,2),(3,-1,2,1),(1,0,0,1)\}$ é linearmente independente e é assim uma base do subespaço de $\mathbb{R}^4$:

$$L\left(\{(1,-1,0,2),(3,-1,2,1),(1,0,0,1)\}\right)$$

tendo-se

$$\dim L\left(\{(1,-1,0,2),(3,-1,2,1),(1,0,0,1)\}\right) = 3.$$

Atendendo ainda ao método de eliminação de Gauss, uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclui pelo menos dois vectores do conjunto apresentado:

$$\{(1,-1,0,2),(1,0,0,1),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

uma vez que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\cdots}{\longrightarrow} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{car}=4}.$$

(iii) Podemos colocar os vectores do conjunto

$$\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,1,0),(0,0,1,1)\}$$

como colunas de uma matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\xrightarrow[-L_2+L_3\to L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3+L_4\to L_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, os vectores das colunas $1, 2, 3$ e 5 da matriz A:

$$\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$$

são uma base de $\mathbb{R}^4$, por serem quatro vectores linearmente independentes de um espaço linear de dimensão 4. E

$$\dim L\left(\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}\right) = \dim \mathbb{R}^4 = 4.$$

(iv) Facilmente se vê que o conjunto $\{(1,0,0,2),(1,0,2,0),(1,2,0,0),(3,0,0,0)\}$ é linearmente independente. Temos então quatro vectores de $\mathbb{R}^4$ linearmente independentes. Como a dimensão de $\mathbb{R}^4$ é 4, então o conjunto

$$\{(1,0,0,2),(1,0,2,0),(1,2,0,0),(3,0,0,0)\}$$

é desde logo uma base de $\mathbb{R}^4$ e

$$\dim L\left(\{(1,0,0,2),(1,0,2,0),(1,2,0,0),(3,0,0,0)\}\right) = \dim \mathbb{R}^4 = 4.$$

(v) Podemos colocar os vectores do conjunto

$$\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(3,-6,11,-1),(0,0,5,5)\}$$

como colunas de uma matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \\ 5 & 6 & 11 & 5 \\ -3 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2\leftrightarrow L_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & -1 & 5 \\ 5 & 6 & 11 & 5 \\ -2 & -4 & -6 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{3L_1+L_2\to L_2 \\ -5L_1+L_3\to L_3 \\ 2L_1+L_4\to L_4}]{}$$

$$\xrightarrow[\substack{3L_1+L_2\to L_2 \\ -5L_1+L_3\to L_3 \\ 2L_1+L_4\to L_4}]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 5 \\ 0 & -4 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{2}L_2+L_3\to L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, os vectores das colunas $1, 2$ e 4 da matriz A formam um conjunto linearmente independente:

$$\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(0,0,5,5)\}.$$

Assim, o conjunto $\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(0,0,5,5)\}$ é uma base de

$$L\left(\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(0,0,5,5)\}\right),$$

tendo-se

$$\dim L\left(\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(0,0,5,5)\}\right)=3.$$

Atendendo ainda ao método de eliminação de Gauss, uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclui pelo menos dois vectores do conjunto inicial:

$$\{(1,-2,5,-3),(0,1,0,0),(2,-4,6,2),(0,0,5,5)\}$$

uma vez que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 5 \\ -3 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \underset{\cdots}{\longrightarrow} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}}_{\text{car}=4}.$$

(vi) Podemos colocar os vectores do conjunto

$$\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2),(5,-2,2,2)\}$$

como colunas de uma matriz e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1\leftrightarrow L_2 \\ L_3\leftrightarrow L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -2L_1+L_3\to L_3 \\ L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -2L_1+L_3\to L_3 \\ L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{-4L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & -30 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, os vectores das colunas $1,2$ e 3 da matriz A formam um conjunto linearmente independente:

$$\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2)\}.$$

Assim, o conjunto $\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2)\}$ é uma base de

$$L\left(\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2)\}\right),$$

tendo-se

$$\dim L(S)=\dim L\left(\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2)\}\right)=3.$$

Uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclui pelo menos dois vectores do conjunto

$$\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2)\}:$$

$$\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2),(0,0,1,0)\}.$$

Vejamos que $(8,-3,3,5)\in L(S)$ e determinemos uma base de $L(S)$ que inclua o vector $(8,-3,3,5)$. Isto é, procuremos $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tais que

$$(8,-3,3,5)=\alpha(2,1,-1,2)+\beta(-1,-1,1,2)+\gamma(4,-2,2,-2).$$

Temos então:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1\leftrightarrow L_2 \\ L_3\leftrightarrow L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 & 8 \\ 2 & 2 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right] \underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -2L_1+L_3\to L_3 \\ L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -2L_1+L_3\to L_3 \\ L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & 14 \\ 0 & 4 & 2 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -2L_1+L_3\to L_3 \\ L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 8 & 14 \\ 0 & 0 & -30 & -45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \quad (*)$$

Logo,

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = 2 \\ \gamma = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Pelo que

$$(8,-3,3,5)=2(2,1,-1,2)+2(-1,-1,1,2)+\frac{3}{2}(4,-2,2,-2).$$

Atendendo a (*), o conjunto

$$\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(8,-3,3,5)\}$$

é uma base de $L(S)$ que inclui o vector $(8,-3,3,5)$.

Atendendo ainda ao método de eliminação de Gauss, uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclui pelo menos dois vectores do conjunto inicial:

$$\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(0,0,1,0),(8,-3,3,5)\}$$

uma vez que

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 5 \end{bmatrix} \underset{\cdots}{\longrightarrow} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 8 \\ 0 & -1/2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -45 \end{bmatrix}}_{\text{car}=4}.$$

35. Como $\mathcal{B}=\{2-t,2+t\}$ é uma base de $\mathcal{P}_1$, existem escalares $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tais que

$$p(t)=t=\alpha(2-t)+\beta(2+t)$$

sendo α e β as coordenadas de $p(t)$ nessa base ordenada. Atendendo a que

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{2}L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{array}\right],$$

$$2\beta=1\Leftrightarrow\beta=\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad 2\alpha+2\beta=0 \underset{\beta=\frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} \alpha=-\frac{1}{2}.$$

Logo $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ são as coordenadas de $p(t)$ em $\mathcal{B}$.

36. **(i)** Podemos colocar os coeficientes dos vectores do conjunto

$$\left\{2t-t^2,1-2t^2,2+t,1-4t\right\}$$

como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{2}L_1+L_3\to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\frac{1}{2}L_1+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} & -2 \end{bmatrix} \underset{2L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{9}{2} & 0 \end{bmatrix}=A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto dos vectores correspondentes às colunas $1,2$ e 3 da matriz A:

$$\left\{2t-t^2,1-2t^2,2+t\right\}$$

é uma base de

$$L\left(\left\{2t-t^2,1-2t^2,2+t,1-4t\right\}\right).$$

Como a dimensão de $\mathcal{P}_2$ é 3, então o conjunto

$$\left\{2t-t^2,1-2t^2,2+t\right\}$$

é desde logo uma base de $\mathcal{P}_2$ tendo-se

$$L\left(\left\{2t-t^2,1-2t^2,2+t,1-4t\right\}\right)=L\left(\left\{2t-t^2,1-2t^2,2+t\right\}\right)=\mathcal{P}_2$$

e

$$\dim L\left(\left\{2t-t^2,1-2t^2,2+t,1-4t\right\}\right)=\dim\mathcal{P}_2=3.$$

Vamos agora escrever o vector $1-t$ como combinação linear dos vectores da base $\{2t-t^2,1-2t^2,2+t\}$. Isto é, procuremos $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tais que

$$1-t=\alpha(2t-t^2)+\beta(1-2t^2)+\gamma(2+t).$$

Temos então:

$$\begin{cases} \beta + 2\gamma = 1 \\ \\ 2\alpha + \gamma = -1 \\ \\ -\alpha - 2\beta = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{3} \\ \\ \gamma = -1 + 4\beta \\ \\ \alpha = -2\beta. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = \frac{1}{3} \\ \\ \gamma = \frac{1}{3} \\ \\ \alpha = -\frac{2}{3}. \end{cases}$$

Pelo que

$$1 - t = -\frac{2}{3}(2t - t^2) + \frac{1}{3}(1 - 2t^2) + \frac{1}{3}(2 + t).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\{2t - t^2, 1 - 2t^2, 2 + t\}$ de $\mathcal{P}_2$, o vector cujas coordenadas são $(-1, 3, 2)$ nessa base, é dado por:

$$(-1)(2t - t^2) + 3(1 - 2t^2) + 2(2 + t) = 7 - 5t^2.$$

(ii) Podemos colocar os coeficientes dos vectores do conjunto

$$\left\{1 + t^2, t - t^2, 1 - t + 2t^2, 1 + t\right\}$$

como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto dos vectores correspondentes às colunas $1, 2$ da matriz A:

$$\left\{1 + t^2, t - t^2\right\}$$

é uma base de

$$L\left(\left\{1 + t^2, t - t^2, 1 - t + 2t^2, 1 + t\right\}\right),$$

tendo-se

$$L\left(\left\{1 + t^2, t - t^2, 1 - t + 2t^2, 1 + t\right\}\right) = L\left(\left\{1 + t^2, t - t^2\right\}\right)$$

e

$$\dim L\left(\left\{1 + t^2, t - t^2, 1 - t + 2t^2, 1 + t\right\}\right) = \dim L\left(\left\{1 + t^2, t - t^2\right\}\right) = 2.$$

(iii) Podemos colocar os coeficientes dos vectores do conjunto

$$\left\{1 + 2t - t^2, 3 + t^2, 5 + 4t - t^2, -2 + 2t - t^2\right\}$$

como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & -6 & -6 & 6 \\ 0 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{6}L_2\to L_2}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\frac{1}{6}L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -3 \end{bmatrix} \underset{4L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto dos vectores correspondentes às colunas $1, 2$ e 4 da matriz A:

$$\left\{1 + 2t - t^2, 3 + t^2, -2 + 2t - t^2\right\}$$

é uma base de

$$L\left(\left\{1 + 2t - t^2, 3 + t^2, 5 + 4t - t^2, -2 + 2t - t^2\right\}\right).$$

Como a dimensão de $\mathcal{P}_2$ é 3, então o conjunto

$$\left\{1 + 2t - t^2, 3 + t^2, -2 + 2t - t^2\right\}$$

é desde logo uma base de $\mathcal{P}_2$ tendo-se

$$L\left(\left\{1 + 2t - t^2, 3 + t^2, 5 + 4t - t^2, -2 + 2t - t^2\right\}\right) =$$

$$= L\left(\left\{1 + 2t - t^2, 3 + t^2, -2 + 2t - t^2\right\}\right) = \mathcal{P}_2$$

e

$$\dim L\left(\left\{1 + 2t - t^2, 3 + t^2, 5 + 4t - t^2, -2 + 2t - t^2\right\}\right) = \dim \mathcal{P}_2 = 3.$$

Vamos agora escrever o vector $1 - t$ como combinação linear dos vectores da base

$$\left\{1 + 2t - t^2, 3 + t^2, -2 + 2t - t^2\right\}.$$

Isto é, procuremos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$1 - t = \alpha(1 + 2t - t^2) + \beta(3 + t^2) + \gamma(-2 + 2t - t^2).$$

Temos então:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando então o método de eliminação de Gauss à matriz aumentada do sistema anterior, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{-2L_1+L_2 \to L_2 \\ L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & -3 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right] \underset{\frac{1}{3}L_2 \to L_2}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\frac{1}{3}L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -3 & 1 \end{array}\right] \underset{2L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Logo,

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \\ \beta = -\frac{1}{2} \\ \\ \gamma = -1. \end{cases}$$

Pelo que
$$1-t=\frac{1}{2}(1+2t-t^2)+\left(-\frac{1}{2}\right)(3+t^2)+(-1)\,(-2+2t-t^2).$$
Finalmente e ainda em relação à base $\{1+2t-t^2, 3+t^2, -2+2t-t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$, o vector cujas coordenadas são $(-1,3,2)$ nessa base, é dado por:
$$(-1)(1+2t-t^2)+3(3+t^2)+2(-2+2t-t^2)=4+2t+2t^2.$$

37. (i) Seja $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Então $\operatorname{tr} A=0\Leftrightarrow a+d=0$. Logo
$$\left\{A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}):\operatorname{tr} A=0\right\}=\left\{\begin{bmatrix} -d & b \\ c & d \end{bmatrix}: b,c,d\in\mathbb{R}\right\}=$$
$$=L\left(\left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right).$$
Como o conjunto $\left\{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ é linearmente independente e gera o subespaço $\left\{A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}):\operatorname{tr} A=0\right\}$, é então uma base deste subespaço, o qual tem assim dimensão 3.

(ii) Seja $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Tem-se então
$$\begin{bmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{bmatrix}$$
ou seja $a=d$ e $b=c$. Assim
$$\left\{A\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}):A\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}A\right\}=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}: a,b\in\mathbb{R}\right\}=$$
$$=L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right).$$
Como o conjunto $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$ é linearmente independente e gera o subespaço
$$\left\{A\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}):A\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}A\right\},$$
é então uma base deste subespaço, o qual tem assim dimensão 2.

38. Como o espaço linear $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tem dimensão 4, então para verificar que as matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

formam uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ basta ver que são linearmente independentes. Sejam $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0,}$$

onde $\mathbf{0}$ é a matriz nula $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Queremos provar que $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$.

Temos então:

$$\begin{bmatrix} \alpha+\gamma & \alpha+\delta \\ \beta+\delta & \beta+\gamma+\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{cases} \alpha+\gamma = 0 \\ \alpha+\delta = 0 \\ \beta+\delta = 0 \\ \beta+\gamma+\delta = 0, \end{cases}$$

ou ainda

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando então o método de eliminação de Gauss à matriz dos coeficientes do sistema homogéneo anterior, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a única solução do sistema é: $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0, 0, 0, 0)$. Assim, o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

39. Seja $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right\}$. Seja W um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por S. Determinemos uma base para W que inclua vectores de S.

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_4 \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \lambda_5 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Temos então:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 11 & -5 & 1 & -2 \\ -1 & -5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{-3L_1+L_2 \to L_2 \\ L_1+L_3 \to L_3 \\ -2L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 11 & -11 & -11 & -11 \\ 0 & -5 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & -3 & -3 & -3 \end{bmatrix} \underset{\substack{\frac{5}{11}L_2+L_3 \to L_3 \\ -\frac{3}{11}L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{\frac{5}{11}L_2+L_3 \to L_3 \\ -\frac{3}{11}L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 11 & -11 & -11 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pelo que sendo as 2 primeiras colunas da matriz em escada anterior independentes, o conjunto de matrizes

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base de W, atendendo também a que

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 11 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \right\} \right).$$

40. A dimensão do espaço linear $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ é 6. Assim, para encontrar uma base de $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$, basta encontrar 6 matrizes do tipo 3×2 que sejam linearmente independentes. O seguinte conjunto de 6 matrizes do tipo 3×2:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é linearmente independente. Logo, é uma base de $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$. (Chama-se a esta base, a base canónica de $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.)

41. (i) Uma matriz diagonal do tipo 3×3 tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad a, b, c \in \mathbb{R}.$$

E tem-se

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Isto é, o subespaço formado por todas as matrizes diagonais do tipo 3×3, é gerado pelo conjunto

$$D = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Além disso, este conjunto é linearmente independente. Temos então que o conjunto D é uma base do subespaço formado por todas as matrizes diagonais do tipo 3×3. Logo, o subespaço tem dimensão 3.

(ii) Uma matriz simétrica do tipo 3×3 tem a seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}.$$

E tem-se

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Isto é, o subespaço formado por todas as matrizes simétricas do tipo 3×3, é gerado pelo conjunto

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Além disso, este conjunto é linearmente independente. Temos então que o conjunto S é uma base do subespaço formado por todas as matrizes simétricas do tipo 3×3. Logo, o subespaço tem dimensão 6.

42. (i)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

As colunas da matriz A que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\}\right)$$

e o conjunto $\{(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(A) = L\left(\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}\right) = \mathbb{R}^3,$$

e o conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$. Desta forma:

$$\text{car} A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = 3.$$

Por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^3 : Au = \mathbf{0}\right\}.$$

A equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(0,0,0)\} \quad \text{e} \quad \text{nul} A = \dim \mathcal{N}(A) = 0.$$

(ii)

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(-1,0,-1),(3,2,3)\}\right)$$

e o conjunto $\{(-1,0,-1),(3,2,3)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(A') = L\left(\{(-1,3,0,2),(0,2,2,0)\}\right),$$

e o conjunto $\{(-1,3,0,2),(0,2,2,0)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$. Desta forma:

$$\text{car} A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = 2.$$

Por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^4 : Au = \mathbf{0}\right\}.$$

Temos então, pelo método de eliminação de Gauss,

$$Au = \mathbf{0} \Leftrightarrow A'u = \mathbf{0}.$$

A equação

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} -u_1 + 3u_2 + 2u_4 = 0 \\ 2u_2 + 2u_3 = 0 \end{cases}$$

ou seja a

$$\begin{cases} u_1 = 3u_2 + 2u_4 \\ u_3 = -u_2. \end{cases}$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(3u_2 + 2u_4, u_2, -u_2, u_4) : u_2, u_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Como

$$(3u_2 + 2u_4, u_2, -u_2, u_4) = (3u_2, u_2, -u_2, 0) + (2u_4, 0, 0, u_4) = u_2(3, 1, -1, 0) + u_4(2, 0, 0, 1),$$

tem-se:

$$\mathcal{N}(A) = L(\{(3, 1, -1, 0), (2, 0, 0, 1)\}).$$

O conjunto $S = \{(3, 1, -1, 0), (2, 0, 0, 1)\}$ é linearmente independente. Como S é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(A)$, temos então que S é uma base de $\mathcal{N}(A)$ e:

$$\text{nul}A = \dim \mathcal{N}(A) = 2.$$

(iii)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_1+L_2\to L_2 \\ -3L_1+L_3\to L_3 \\ -L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & -8 & 4 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{-2L_2+L_3\to L_3 \\ -L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A) = L(\{(1, 2, 3, 1), (2, 3, 4, 1)\})$$

e o conjunto $\{(1, 2, 3, 1), (2, 3, 4, 1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(A) = L(\{(1, 2, 3, -1), (0, -1, -4, 2)\}),$$

e o conjunto $\{(1, 2, 3, -1), (0, -1, -4, 2)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$. Desta forma:

$$\text{car}A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = 2.$$

Por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^4 : Au = \mathbf{0}\right\}.$$

Temos então, pelo método de eliminação de Gauss,

$$Au = \mathbf{0} \Leftrightarrow A'u = \mathbf{0}.$$

A equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + 3u_3 - u_4 = 0 \\ -u_2 - 4u_3 + 2u_4 = 0 \end{cases}$$

ou seja a

$$\begin{cases} u_1 = -2u_2 - 3u_3 + u_4 \\ u_2 = -4u_3 + 2u_4 \end{cases}$$

e ainda a

$$\begin{cases} u_1 = 5u_3 - 3u_4 \\ u_2 = -4u_3 + 2u_4. \end{cases}$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(5u_3 - 3u_4, -4u_3 + 2u_4, u_3, u_4) : u_3, u_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Como

$$\begin{aligned} (5u_3 - 3u_4, -4u_3 + 2u_4, u_3, u_4) &= (5u_3, -4u_3, u_3, 0) + (-3u_4, 2u_4, 0, u_4) \\ &= u_3(5, -4, 1, 0) + u_4(-3, 2, 0, 1), \end{aligned}$$

tem-se:

$$\mathcal{N}(A) = L\left(\{(5, -4, 1, 0), (-3, 2, 0, 1)\}\right).$$

O conjunto $S = \{(5, -4, 1, 0), (-3, 2, 0, 1)\}$ é linearmente independente. Como S é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(A)$, temos então que S é uma base de $\mathcal{N}(A)$ e:

$$\text{nul}A = \dim \mathcal{N}(A) = 2.$$

43. Seja $A \in M_{3\times3}(\mathbb{R})$ tal que $\text{nul}\, A = \dim \mathcal{N}(A) = 3$. Uma vez que

$$\text{n}^o \text{ de colunas de } A = \text{car}A + \text{nul}A,$$

então $\text{car}\, A = 0$. Isto é, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

44. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que

$$\mathcal{C}(A) = \mathcal{N}(A).$$

Logo, o n^o de linhas de A é igual ao n^o de colunas de A. Isto é, $m = n$. Além disso, como

$$n = \text{car}A + \text{nul}A,$$

tem-se

$$n = 2 \dim \mathcal{N}(A).$$

Pelo que, $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com n par. Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

45. Sejam U e V subespaços de W tais que $\dim U = 4, \dim V = 5$ e $\dim W = 7$. Tem-se

$$\dim (U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim (U + V) = 9 - \dim (U + V).$$

Como $U + V$ é subespaço de W, tem-se

$$5 = \dim V \leq \dim (U + V) \leq \dim W = 7$$

e assim $\dim (U + V) \in \{5, 6, 7\}$. Logo,

$$\dim (U \cap V) \in \{2, 3, 4\}.$$

46. Determine bases e calcule as dimensões de $U + V$ e $U \cap V$, dizendo em que casos $U + V$ é a soma directa $U \oplus V$ (determine-a) dos subespaços U e V.

(i) Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços:

$$U = L(\{(1,-1,1),(0,1,1)\}) \quad \text{e} \quad V = L(\{(1,1,2),(-1,1,1)\}).$$

Logo, $U + V = L(U \cup V) = L(\{(1,-1,1),(0,1,1),(1,1,2),(-1,1,1)\})$. Facilmente se verifica que $\{(1,-1,1),(0,1,1),(-1,1,1)\}$ é uma base de $U + V$, ou melhor de $\mathbb{R}^3$. Logo, $\dim (U + V) = 3$ e

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim (U + V) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Seja $(x, y, z) \in U$. Tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ -1 & 1 & y \\ 1 & 1 & z \end{array}\right] \underset{\substack{L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 1 & z-x \end{array}\right] \underset{-L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & z-2x-y \end{array}\right].$$

Logo

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - 2x - y = 0\right\}.$$

Seja $(x, y, z) \in V$. Tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 2 & 1 & z \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -2L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & y-x \\ 0 & 3 & z-2x \end{array}\right] \underset{-\frac{3}{2}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & x \\ 0 & 2 & y-x \\ 0 & 0 & z-\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}x \end{array}\right].$$

Logo

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z - 3y - x = 0\right\}.$$

Deste modo

$$U \cap V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - 2x - y = 0 \;\text{ e }\; 2z - 3y - x = 0\right\} = L\left(\{(1, 3, 5)\}\right)$$

e como tal, $\{(1, 3, 5)\}$ é uma base de $U \cap V$, tendo-se $\dim (U \cap V) = 1$.

Neste caso, como $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$ então $U + V$ não é a soma directa dos subespaços U e V.

(ii) Sejam $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \;\text{ e }\; x + y = 0\}$, $V = L(\{(1, 1, 1)\})$.
Tem-se $(1, 1, 1) \notin U$ pois $1 + 1 - 1 \neq 0$. Logo

$$U \cap V = \{\mathbf{0}\} \quad \text{e} \quad \dim (U \cap V) = 0.$$

Por outro lado, como

$$U = \left\{(-y, y, 0) \in \mathbb{R}^3 : y \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\{(-1, 1, 0)\}\right),$$

tem-se

$$U + V = L\left(\{(-1, 1, 0), (1, 1, 1)\}\right)$$

e sendo $\{(-1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ uma base de $U + V$, $\dim (U + V) = 2$.

Além disso, como $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$, $\dim U \cap V = 0$ e

$$U + V = U \oplus V = L\left(\{(-1, 1, 0), (1, 1, 1)\}\right).$$

(iii) Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços:

$$U = L\left(\{(1, 0, 1), (-1, 1, 2)\}\right) \quad \text{e} \;\; V = \{(x, y, z) : x + y + 3z = 0\}.$$

Seja $v \in U$, então

$$v = \alpha(1, 0, 1) + \beta(-1, 1, 2) = (\alpha - \beta, \beta, \alpha + 2\beta),$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Para que v esteja também em V é preciso que:

$$\alpha - \beta + \beta + 3(\alpha + 2\beta) = 0.$$

isto é,

$$4\alpha + 6\beta = 0 \;\Leftrightarrow\; \alpha = -\frac{3}{2}\beta.$$

Assim,

$$v = \alpha(1, 0, 1) + \beta(-1, 1, 2) = \left(-\frac{5}{2}\beta, \beta, \frac{1}{2}\beta\right) = \beta\left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right).$$

Logo,

$$U \cap V = \left\{\beta\left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) : \beta \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\left\{\left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)\right\}\right)$$

e como tal, $\left\{\left(-\frac{5}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)\right\}$ é uma base de $U \cap V$, tendo-se $\dim (U \cap V) = 1$.

Tem-se
$$V = L\left(\{(-1,1,0),(-3,0,1)\}\right).$$
Logo,
$$U + V = L\left(U \cup V\right) = L\left(\{(1,0,1),(-1,1,2),(-1,1,0),(-3,0,1)\}\right).$$
Facilmente se verifica que $\{(1,0,1),(-1,1,2),(-1,1,0)\}$ é uma base de $U+V$, ou melhor de $\mathbb{R}^3$. Logo, $\dim(U+V) = 3$.

Neste caso, como $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$ então $U+V$ não é a soma directa dos subespaços U e V.

(iv) Em $\mathbb{R}^3$, considere os subespaços:
$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\right\} \quad \text{e} \quad V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\right\}.$$
Tem-se $U = L\left(\{(1,1,1)\}\right)$ e $V = L\left(\{(0,1,0),(0,0,1)\}\right)$.

Como $\{(1,1,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $U+V = L\left(U \cup V\right)$ então
$$\dim(U+V) = 3 \quad \text{e} \quad U + V = U \oplus V = \mathbb{R}^3.$$
Como $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$ então $\dim(U \cap V) = 0$.

(v) Em $\mathcal{P}_2$, considere os subespaços:
$$U = L\left(\left\{1+t, 1-t^2\right\}\right) \quad \text{e} \quad V = \left\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 + a_0 = 0\right\}.$$
Seja $p(t) \in U$. Então existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que
$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 = \alpha(1+t) + \beta\left(1 - t^2\right).$$
Tem-se
$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & a_2 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & -1 & a_1 - a_0 \\ 0 & -1 & a_2 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & -1 & a_1 - a_0 \\ 0 & 0 & a_2 - a_1 + a_0 \end{array}\right].$$
Logo, tem-se
$$U = V$$
pelo que
$$U + V = U = V \quad \text{e} \quad U \cap V = U = V.$$
Assim, $\{1+t, 1-t^2\}$ é uma base de U, de V, de $U+V$ e de $U \cap V$, tendo-se
$$\dim(U+V) = \dim(U \cap V) = 2.$$
Neste caso, como $U \cap V \neq \{\mathbf{0}\}$ então $U+V$ não é a soma directa dos subespaços U e V.

(vi) Como
$$p(-1) = 2p(0) - p(1) \Leftrightarrow a_0 - a_1 + a_2 = 2a_0 - (a_0 + a_1 + a_2) \Leftrightarrow a_2 = 0$$
então

$$V_1 = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : \; p(-1) = 2p(0) - p(1)\} = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_2 = 0\}.$$

Tem-se

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & | & a_0 \\ 1 & 0 & | & a_1 \\ 0 & -1 & | & a_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & | & a_0 \\ 0 & 1 & | & a_0 + a_1 \\ 0 & 0 & | & a_0 + a_1 + a_2 \end{bmatrix}$$

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in V_2 = L(\{-1+t, 1-t^2\}) \Leftrightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 0.$$

Logo

$$V_2 = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0 + a_1 + a_2 = 0\}.$$

Pelo que

$$U + V = L(U \cup V) = L\left(\left\{-1+t, 1-t^2, 1, t\right\}\right) = L\left(\left\{1-t^2, 1, t\right\}\right) = \mathcal{P}_2.$$

e

$$\begin{aligned} V_1 \cap V_2 &= \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0 + a_1 + a_2 = 0 \text{ e } a_2 = 0\} = \\ &= \{-a_1 + a_1 t : a_1 \in \mathbb{R}\} = L(\{-1+t\}). \end{aligned}$$

Como $\{1-t^2, 1, t\}$ gera $V_1 + V_2$ (uma vez que $-1+t = (-1) \times 1 + 1 \times t$) e, é também linearmente independente, então é uma base para $V_1 + V_2$, ou melhor de $\mathcal{P}_2$. Como $\{-1+t\}$ gera $V_1 \cap V_2$ e, é também linearmente independente, então é uma base para $V_1 \cap V_2$. Como $V_1 \cap V_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ então $V_1 + V_2$ não é a soma directa dos subespaços V_1 e V_2.

(vii) Como

$$p(1) = 0 \Leftrightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 0$$

então

$$V_1 = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : a_0 + a_1 + a_2 = 0\}.$$

Tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & a_0 \\ -1 & 1 & 0 & | & a_1 \\ 0 & -1 & 1 & | & a_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & | & a_0 \\ 0 & 1 & -1 & | & a_0 + a_1 \\ 0 & 0 & 0 & | & a_0 + a_1 + a_2 \end{bmatrix}$$

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in V_2 = L(\{1-t, t-t^2, -1+t^2\}) \Leftrightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 0.$$

Logo $V_2 = V_1$ e então: $V_1 \cap V_2 = V_2 = V_1 = V_1 + V_2$. Além disso

$$\dim (V_1 \cap V_2) = \dim V_1 = 3 - \operatorname{car}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2,$$

pelo que, como $V_2 = L(\{1-t, t-t^2\})$, então $\{1-t, t-t^2\}$ é uma base para $V_1 \cap V_2 = V_2 = V_1 = V_1 + V_2$. Como $V_1 \cap V_2 \neq \{\mathbf{0}\}$ então $V_1 + V_2$ não é a soma directa dos subespaços V_1 e V_2.

(viii) Em $\mathcal{P}_3$, considere os subespaços:

$$U = L\left(\left\{1+t, 1-t^3\right\}\right) \quad \text{e} \quad V = L\left(\left\{1+t+t^2, t-t^3, 1+t+t^3\right\}\right).$$

Logo

$$U + V = L(U \cup V) = L\left(\left\{1+t, 1-t^3, 1+t+t^2, t-t^3, 1+t+t^3\right\}\right).$$

Vejamos quais dos vectores do conjunto

$$\left\{1+t, 1-t^3, 1+t+t^2, t-t^3, 1+t+t^3\right\}$$

são linearmente independentes. Coloquemos então os coeficientes desses vectores como colunas de uma matriz:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} = A'. \ (*)$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$\left\{1+t, 1-t^3, 1+t+t^2, t-t^3\right\}$$

é uma base de $U+V$, tendo-se $\dim(U+V)=4$ e deste modo $U+V=\mathcal{P}_3$.

Por outro lado, também se conclui de (*) que o conjunto

$$\left\{1+t, 1-t^3\right\}$$

é base de U, tendo-se $\dim U = 2$, e como

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_3\to L_3 \\ L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{2L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o conjunto

$$\left\{1+t+t^2, t-t^3, 1+t+t^3\right\}$$

é base de V, tendo-se $\dim V = 3$.

Logo,

$$\dim(U\cap V)=\dim U+\dim V-\dim(U+V)=2+3-4=1.$$

Neste caso, como $U\cap V\neq\{\mathbf{0}\}$ então $U+V$ não é a soma directa dos subespaços U e V.

Determinemos $U\cap V$. Seja $p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\in U$. Tem-se

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & a_3 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & -1 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & a_3 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a_0 \\ 0 & -1 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3+a_0-a_1 \end{array}\right].$$

Logo

$$U=\left\{a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\in\mathcal{P}_3 : a_2=0 \ \text{ e } \ a_3+a_0-a_1=0\right\}.$$

Seja $q(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3\in V$. Tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 1 & 1 & 1 & a_1 \\ 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & -1 & 1 & a_3 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & -1 & a_2-a_0 \\ 0 & -1 & 1 & a_3 \end{array}\right] \underset{L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow}$$

$$\xrightarrow[L_2+L_4\to L_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & | & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & -1 & | & a_2-a_0 \\ 0 & 0 & 1 & | & a_1-a_0+a_3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3+L_4\to L_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & a_0 \\ 0 & 1 & 0 & | & a_1-a_0 \\ 0 & 0 & -1 & | & a_2-a_0 \\ 0 & 0 & 0 & | & a_1+a_2-2a_0+a_3 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$V = \left\{a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in \mathcal{P}_3 : a_1 + a_2 - 2a_0 + a_3 = 0\right\}.$$

Deste modo

$$U\cap V = \left\{a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in \mathcal{P}_3 : a_2 = 0 \ \text{ e } \ a_0 - a_1 + a_3 = 0 \ \text{ e } \ -2a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0\right\} =$$

$$= a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in \mathcal{P}_3 : (a_0, a_1, a_2, a_3) \in \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right).$$

Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[2L_2+L_3\to L_3]{} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1\leftrightarrow L_2]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2\leftrightarrow L_3]{} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$U\cap V = \left\{a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in \mathcal{P}_3 : a_0 - a_1 + a_3 = 0 \ \text{ e } \ -a_1 + a_2 + 3a_3 = 0 \ \text{ e } \ a_2 = 0\right\} =$$

$$= \left\{a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in \mathcal{P}_3 : a_0 = 2a_3 \ \text{ e } \ a_1 = 3a_3 \ \text{ e } \ a_2 = 0\right\} =$$

$$= \left\{2a_3 + 3a_3t + a_3t^3 \in \mathcal{P}_3 : a_3 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{a_3\left(2 + 3t + t^3\right) \in \mathcal{P}_3 : a_3 \in \mathbb{R}\right\} = L\left(\left\{2 + 3t + t^3\right\}\right).$$

e como tal, $\{2 + 3t + t^3\}$ é uma base de $U \cap V$, tendo-se $\dim(U \cap V) = 1$.

(ix) Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços:

$$U = L\left(\{(2,-2,1,-2),(-1,1,1,3),(0,0,-6,-8),(-1,1,-5,-5)\}\right)$$

e

$$V = L\left(\{(0,0,0,-1),(0,1,2,3),(0,2,4,8)\}\right).$$

Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -6 & -5 & 0 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & -8 & -5 & -1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_2\to L_2 \\ -\frac{1}{2}L_1+L_3\to L_3 \\ L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3/2 & -6 & -9/2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -8 & -6 & -1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2\leftrightarrow L_4]{}$$

$$\xrightarrow[L_2\leftrightarrow L_4]{} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -6 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 3/2 & -6 & -9/2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[-\frac{3}{4}L_2+L_3\to L_3]{} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -6 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3/4 & -1/4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = A' \quad (*).$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$\{(2,-2,1,-2),(-1,1,1,3),(0,1,2,3),(0,2,4,8)\}$$

é uma base de $U+V$, tendo-se $\dim(U+V)=4$ e deste modo $U+V=\mathbb{R}^4$.

Por outro lado, também se conclui de (*) que o conjunto

$$\{(2,-2,1,-2),(-1,1,1,3)\}$$

é base de U, tendo-se $\dim U=2$, e como

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 8 \\ 3/4 & -1/4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & -1/4 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2\leftrightarrow L_4 \\ 4L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{3L_1+L_3\to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{3L_1+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 8 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{-8L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 3 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o conjunto

$$\{(0,0,0,-1),(0,1,2,3)\}$$

é base de V, tendo-se $\dim V=2$.

Logo,

$$\dim(U\cap V)=\dim U+\dim V-\dim(U+V)=2+2-4=0.$$

Neste caso, como $U\cap V=\{\mathbf{0}\}$ então $\dim U\cap V=0$ e

$$U+V=U\oplus V=\mathbb{R}^4.$$

(x) Em $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços:

$$U=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x+2y+3z=0 \ \text{ e } \ y+2z+3w=0\right\}$$

e

$$V=L\left(\{(2,5,-4,1),(0,9,-6,1),(-4,-1,2,-1)\}\right).$$

Seja $(x,y,z,w)\in V$. Então existem $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z,w)=\alpha(2,5,-4,1)+\beta(0,9,-6,1)+\gamma(-4,-1,2,-1).$$

Tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -4 & x \\ 5 & 9 & -1 & y \\ -4 & -6 & 2 & z \\ 1 & 1 & -1 & w \end{array}\right] \underset{L_1\leftrightarrow L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & w \\ 5 & 9 & -1 & y \\ -4 & -6 & 2 & z \\ 2 & 0 & -4 & x \end{array}\right] \underset{\substack{-5L_1+L_2\to L_2 \\ 4L_1+L_3\to L_3 \\ -2L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-5L_1+L_2\to L_2\\4L_1+L_3\to L_3\\-2L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&w\\0&4&4&y-5w\\0&-2&-2&z+4w\\0&-2&-2&x-2w\end{array}\right]\underset{\substack{\frac{1}{2}L_2+L_3\to L_3\\\frac{1}{2}L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&w\\0&4&4&y-5w\\0&0&0&\frac{3}{2}w+\frac{1}{2}y+z\\0&0&0&x-\frac{9}{2}w+\frac{1}{2}y\end{array}\right]\quad(*)$$

Logo, tem-se

$$V=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4:\frac{3}{2}w+\frac{1}{2}y+z=0\ \text{ e }\ x-\frac{9}{2}w+\frac{1}{2}y=0\right\}=$$

$$=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4:y+2z+3w=0\ \text{ e }\ x+2y+3z=0\right\}=U$$

pelo que

$$U+V=U=V\quad\text{e}\quad U\cap V=U=V.$$

Atendendo ainda a (*), o conjunto $\{(2,5,-4,1),(0,9,-6,1),(-4,-1,2,-1)\}$ é linearmente dependente, sendo linearmente independente o seguinte seu subconjunto

$$\{(2,5,-4,1),(0,9,-6,1)\}.$$

Assim, $\{(2,5,-4,1),(0,9,-6,1)\}$ é uma base de U, de V, de $U+V$ e de $U\cap V$, tendo-se

$$\dim(U+V)=\dim(U\cap V)=2.$$

Neste caso, como $U\cap V\neq\{\mathbf{0}\}$ então $U+V$ não é a soma directa dos subespaços U e V.

(xi) Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por

$$\{(1,-1,-1,-2,0),(1,-2,-2,0,-3),(1,-1,-2,-2,1)\}.$$

Seja V o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por

$$\{(1,-2,-3,0,-2),(1,-1,-3,2,-4),(1,-1,-2,2,-5)\}.$$

Tem-se

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\-1&-2&-1&-2&-1&-1\\-1&-2&-2&-3&-3&-2\\-2&0&-2&0&2&2\\0&-3&1&-2&-4&-5\end{bmatrix}\underset{\substack{L_1+L_2\to L_2\\L_1+L_3\to L_3\\2L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&0&-1&0&0\\0&-1&-1&-2&-2&-1\\0&2&0&2&4&4\\0&-3&1&-2&-4&-5\end{bmatrix}\underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3\\2L_2+L_4\to L_4\\-3L_2+L_5\to L_5}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3\\2L_2+L_4\to L_4\\-3L_2+L_5\to L_5}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&0&-1&0&0\\0&0&-1&-1&-2&-1\\0&0&0&0&4&4\\0&0&1&1&-4&-5\end{bmatrix}\underset{L_3+L_5\to L_5}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&0&-1&0&0\\0&0&-1&-1&-2&-1\\0&0&0&0&4&4\\0&0&0&0&-6&-6\end{bmatrix}\underset{\frac{3}{2}L_4+L_5\to L_5}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\frac{3}{2}L_4+L_5\to L_5}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&1\\0&-1&0&-1&0&0\\0&0&-1&-1&-2&-1\\0&0&0&0&4&4\\0&0&0&0&0&0\end{bmatrix}=A'\quad(*),$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$\{(1,-1,-1,-2,0),(1,-2,-2,0,-3),(1,-1,-2,-2,1),(1,-1,-3,2,-4)\}$$

é uma base de $U+V$, tendo-se $\dim(U+V)=4$.

Por outro lado, também se conclui de (*) que o conjunto

$$\{(1,-1,-1,-2,0),(1,-2,-2,0,-3),(1,-1,-2,-2,1)\}$$

é base de U, tendo-se $\dim U=3$, e como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2+L_3\to L_3 \\ -4L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o conjunto

$$\{(1,-2,-3,0,-2),(1,-1,-3,2,-4),(1,-1,-2,2,-5)\}$$

é base de V, tendo-se $\dim V=3$.

Logo,

$$\dim(U\cap V)=\dim U+\dim V-\dim(U+V)=3+3-4=2.$$

Neste caso, como $U\cap V\neq\{\mathbf{0}\}$ então $U+V$ não é a soma directa dos subespaços U e V.

Determinemos uma base para $U\cap V$. Atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ -1 & -2 & -1 & x_2 \\ -1 & -2 & -2 & x_3 \\ -2 & 0 & -2 & x_4 \\ 0 & -3 & 1 & x_5 \end{array}\right] \underset{\substack{L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_3\to L_3 \\ 2L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & x_1+x_2 \\ 0 & -1 & -1 & x_1+x_3 \\ 0 & 2 & 0 & 2x_1+x_4 \\ 0 & -3 & 1 & x_5 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ 2L_2+L_4\to L_4 \\ -3L_2+L_5\to L_5}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3 \\ 2L_2+L_4\to L_4 \\ -3L_2+L_5\to L_5}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & -1 & -x_2+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 4x_1+2x_2+x_4 \\ 0 & 0 & 1 & -3x_1-3x_2+x_5 \end{array}\right] \underset{L_3+L_5\to L_5}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & -1 & 0 & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & -1 & -x_2+x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 4x_1+2x_2+x_4 \\ 0 & 0 & 0 & -3x_1-4x_2+x_3+x_5 \end{array}\right]$$

tem-se

$$U=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5 : 4x_1+2x_2+x_4=0 \text{ e } -3x_1-4x_2+x_3+x_5=0\right\}.$$

Por outro lado, atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ -2 & -1 & -1 & x_2 \\ -3 & -3 & -2 & x_3 \\ 0 & 2 & 2 & x_4 \\ -2 & -4 & -5 & x_5 \end{array}\right] \underset{\substack{2L_1+L_2\to L_2 \\ 3L_1+L_3\to L_3 \\ 2L_1+L_5\to L_5}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 1 & 2x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 1 & 3x_1+x_3 \\ 0 & 2 & 2 & x_4 \\ 0 & -2 & -3 & 2x_1+x_5 \end{array}\right] \underset{\substack{-2L_2+L_4\to L_4 \\ L_3+L_5\to L_5}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-2L_2+L_4\to L_4\\ L_3+L_5\to L_5}}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1\\ 0 & 1 & 1 & 2x_1+x_2\\ 0 & 0 & 1 & 3x_1+x_3\\ 0 & 0 & 0 & -4x_1-2x_2+x_4\\ 0 & -2 & -2 & 5x_1+x_3+x_5 \end{array}\right]\underset{2L_2+L_5\to L_5}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & x_1\\ 0 & 1 & 1 & 2x_1+x_2\\ 0 & 0 & 1 & 3x_1+x_3\\ 0 & 0 & 0 & -4x_1-2x_2+x_4\\ 0 & 0 & 0 & 9x_1+2x_2+x_3+x_5 \end{array}\right]$$

tem-se

$$V=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5 : -4x_1-2x_2+x_4=0 \text{ e } 9x_1+2x_2+x_3+x_5=0\right\}.$$

Logo

$$U\cap V=\left\{\begin{array}{c}(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)\in\mathbb{R}^5 : 4x_1+2x_2+x_4=0 \text{ e } -3x_1-4x_2+x_3+x_5=0\\ \text{e } -4x_1-2x_2+x_4=0 \text{ e } 9x_1+2x_2+x_3+x_5=0\end{array}\right\}$$

Como

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -3 & -4 & 1 & 0 & 1\\ -4 & -2 & 0 & 1 & 0\\ 9 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\underset{\substack{L_1+L_3\to L_3\\ 3L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -3 & -4 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -10 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}\underset{\frac{3}{4}L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{5}{2} & 1 & \frac{3}{4} & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & -10 & 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}\underset{-4L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-4L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -\frac{5}{2} & 1 & \frac{3}{4} & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}\underset{\substack{4L_2\to L_2\\ \frac{3}{2}L_3+L_4\to L_{44}}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -10 & 4 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_4=0\\ -10x_2+4x_3+3x_4+4x_5=0\\ 2x_4=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x_1=-\frac{1}{2}x_2=-\frac{1}{5}x_3-\frac{1}{5}x_5\\ x_2=\frac{2}{5}x_3+\frac{2}{5}x_5\\ x_4=0 \end{cases}$$

pelo que

$$\begin{aligned} U\cap V &= \left\{\left(-\frac{1}{5}x_3-\frac{1}{5}x_5,\frac{2}{5}x_3+\frac{2}{5}x_5,x_3,0,x_5\right)\in\mathbb{R}^5 : x_3,x_5\in\mathbb{R}\right\}=\\ &= L\left(\left\{\left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5},1,0,0\right),\left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5},0,0,1\right)\right\}\right). \end{aligned}$$

Como o conjunto

$$\left\{\left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5},1,0,0\right),\left(-\frac{1}{5},\frac{2}{5},0,0,1\right)\right\}$$

gera $U\cap V$ e é linearmente independente, então é uma base de $U\cap V$, tendo-se $\dim(U\cap V)=2$.

(xii) Tem-se

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\underset{\substack{L_1+L_3\to L_3\\ -\frac{1}{2}L_1+L_3\to L_3\\ L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\underset{\substack{-L_2+L_3\to L_3\\ -L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-L_2+L_4\to L_4}}{\xrightarrow[-L_2+L_3\to L_3]{}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[2L_3+L_4\to L_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} = A' \quad (*).$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$\{(1,0,-1,0),(0,1,1,1),(1,0,0,-2),(1,1,1,1)\}$$

é uma base de $U+V$, tendo-se $\dim(U+V)=4$ e assim $U+V=\mathbb{R}^4$.

Por outro lado, também se conclui de (*) que o conjunto

$$\{(1,0,-1,0),(0,1,1,1),(1,0,0,-2)\}$$

é base de U, tendo-se $\dim U=3$, e como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{-L_1+L_3\to L_3 \\ -2L_1+L_4\to L_4}}{\xrightarrow[-L_1+L_2\to L_2]{}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -7 & 3 \end{bmatrix} \underset{7L_2+L_4\to L_4}{\xrightarrow[2L_2+L_3\to L_3]{}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[-3L_3+L_4\to L_4]{} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

o conjunto

$$\{(1,1,1,1),(1,2,0,-1),(0,0,1,1)\}$$

é base de V, tendo-se $\dim V=3$. Logo,

$$\dim(U\cap V)=\dim U+\dim V-\dim(U+V)=3+3-4=2.$$

Como $U\cap V\neq\{\mathbf{0}\}$ então $U+V$ não é a soma directa dos subespaços U e V.

Uma base para $U\cap V$. Atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ -1 & 1 & 0 & x_3 \\ 0 & 1 & -2 & x_4 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1+L_3\to L_3]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 1 & x_1+x_3 \\ 0 & 1 & -2 & x_4 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_4\to L_4}{\xrightarrow[-L_2+L_3\to L_3]{}}$$

$$\underset{-L_2+L_4\to L_4}{\xrightarrow[-L_2+L_3\to L_3]{}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1+x_3-x_2 \\ 0 & 0 & -2 & x_4-x_2 \end{array}\right] \xrightarrow[2L_3+L_4\to L_4]{} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 & x_1+x_3-x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 2x_1-3x_2+2x_3+x_4 \end{array}\right]$$

tem-se

$$U=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4 : 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=0\right\}$$

Por outro lado, atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 2 & 0 & x_2 \\ 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 1 & -1 & 1 & x_4 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_3\to L_3 \\ -L_1+L_4\to L_4}}{\xrightarrow[-L_1+L_2\to L_2]{}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & x_2-x_1 \\ 0 & -1 & 1 & x_3-x_1 \\ 0 & -2 & 1 & x_4-x_1 \end{array}\right] \underset{2L_2+L_4\to L_4}{\xrightarrow[L_2+L_3\to L_3]{}}$$

$$\underset{\substack{L_2+L_3\to L_3\\2L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&x_1\\0&1&0&x_2-x_1\\0&0&1&x_2-2x_1+x_3\\0&0&1&2x_2-3x_1+x_4\end{array}\right]\underset{-L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&0&x_1\\0&1&0&x_2-x_1\\0&0&1&x_2-2x_1+x_3\\0&0&0&x_2-x_1-x_3+x_4\end{array}\right]$$

tem-se

$$V=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4:-x_1+x_2-x_3+x_4=0\right\}.$$

Logo

$$\begin{aligned}U\cap V&=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4:2x_1-3x_2+2x_3+x_4=0\ \text{ e }\ -x_1+x_2-x_3+x_4=0\right\}=\\&=\left\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4:x_2=3x_4\ \text{ e }\ x_1=-x_3+4x_4\right\}=\\&=\{(-x_3+4x_4,3x_4,x_3,x_4):x_3,x_4)\in\mathbb{R}\}=L\left(\{(-1,0,1,0),(4,3,0,1)\}\right)\end{aligned}$$

Como o conjunto

$$\{(-1,0,1,0),(4,3,0,1)\}$$

gera $U\cap V$ e é linearmente independente, então é uma base de $U\cap V$, tendo-se $\dim(U\cap V)=2$.

47.

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&0&2&1\\0&0&2&4&0\\2&-2&-1&2&1\\-1&1&2&2&1\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\underset{\substack{-2L_1+L_3\to L_3\\L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&-1&0&2&1\\0&0&2&4&0\\0&0&-1&-2&-1\\0&0&2&4&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\underset{\substack{\frac12L_2+L_3\to L_3\\-L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{\frac12L_2+L_3\to L_3\\-L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&-1&0&2&1\\0&0&2&4&0\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&2\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\underset{2L_3+L_4\to L_4}{\longrightarrow}\begin{bmatrix}1&-1&0&2&1\\0&0&2&4&0\\0&0&0&0&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=A'.$$

(i)

$$\operatorname{car}A=\dim\mathcal{C}(A)=\dim\mathcal{L}(A)=3.$$

Como A tem 5 colunas e

$$\text{n}^o\text{ de colunas de }A=\operatorname{car}A+\operatorname{nul}A,$$

então

$$\operatorname{nul}A=2,\qquad\text{isto é,}\quad\dim\mathcal{N}(A)=2.$$

(ii) As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A)=L\left(\{(1,0,2,-1,0),(0,2,-1,2,0),(1,0,1,1,0)\}\right)$$

e o conjunto $\{(1,0,2,-1,0),(0,2,-1,2,0),(1,0,1,1,0)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$.

Por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^5 : Au = \mathbf{0}\right\}.$$

Temos então, pelo método de eliminação de Gauss,

$$Au = \mathbf{0} \Leftrightarrow A'u = \mathbf{0}.$$

A equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} u_1 - u_2 + 2u_4 + u_5 = 0 \\ 2u_3 + 4u_4 = 0 \\ -u_5 = 0 \end{cases}$$

ou seja a

$$\begin{cases} u_1 = u_2 - 2u_4 \\ u_3 = -2u_4 \\ u_5 = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(u_2 - 2u_4, u_2, -2u_4, u_4, 0) : u_2, u_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Como

$$\begin{aligned} (u_2 - 2u_4, u_2, -2u_4, u_4, 0) &= (u_2, u_2, 0, 0, 0) + (-2u_4, 0, -2u_4, u_4, 0) \\ &= u_2(1, 1, 0, 0, 0) + u_4(-2, 0, -2, 1, 0), \end{aligned}$$

tem-se:

$$\mathcal{N}(A) = L\left(\{(1, 1, 0, 0, 0), (-2, 0, -2, 1, 0)\}\right).$$

Facilmente se verifica que o conjunto $S = \{(1, 1, 0, 0, 0), (-2, 0, -2, 1, 0)\}$ é linearmente independente. Como S é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(A)$, temos então que S é uma base de $\mathcal{N}(A)$.

(iii) A solução geral do sistema de equações lineares homogéneo $Au = \mathbf{0}$ é dada por

$$\lambda(1, 1, 0, 0, 0) + \mu(-2, 0, -2, 1, 0),$$

com $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(iv) Uma solução particular de $Au = b$, com $b = (1, 0, 2, -1, 0)$, é por exemplo $u = (1, 0, 0, 0, 0)$. Logo, a solução geral de $Au = b$ é dada por:

$$(1, 0, 0, 0, 0) + \lambda(1, 1, 0, 0, 0) + \mu(-2, 0, -2, 1, 0).$$

Observação. Note que se tem sempre:

$$\text{n}^o \text{ de colunas de } A = \text{car}A + \text{nul}A.$$

48. a)

$$\mathcal{N}(A+B)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}0&-1&0&1\\0&0&2&0\end{bmatrix}\right)=$$
$$=\left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4:\ -y+w=0e2z=0\right\}=$$

$$=\{(x,y,0,y):x,y\in\mathbb{R}\}=\{x(1,0,0,0)+y(0,1,0,1):x,y\in\mathbb{R}\}=$$
$$=L\left(\{(1,0,0,0),(0,1,0,1)\}\right).$$

Como
$$\dim\mathcal{N}(A+B)=4-\operatorname{car}(A+B)=2$$
e $\{(1,0,0,0),(0,1,0,1)\}$ gera $\mathcal{N}(A+B)$, então
$$\{(1,0,0,0),(0,1,0,1)\}$$
é base de $\mathcal{N}(A+B)$.

b)

$$\dim\left(\mathcal{N}(A)+\mathcal{N}(B)\right)=\dim\mathcal{N}(A)+\dim\mathcal{N}(B)-\dim\left(\mathcal{N}(A)\cap\mathcal{N}(B)\right)=$$

$$=(4-\operatorname{car}A)+(4-\operatorname{car}B)-\dim\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\right)=2+2-1=3$$

49. a) $A=\begin{bmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{bmatrix}\underset{\cdots}{\rightarrow}\begin{bmatrix}-1&1&1\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix}$. Como as 3 colunas de A são linearmente independentes então $\dim\mathcal{C}(A)=3$ e assim $\mathcal{C}(A)=\mathbb{R}^3$, pelo que a base canónica $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$.

b) $u=\begin{bmatrix}-1&0&1\end{bmatrix}^T$ é uma solução particular de $Au=\begin{bmatrix}2&0&-2\end{bmatrix}^T$. Como $\mathcal{N}(A)=\{\mathbf{0}\}$ uma vez que A é invertível atendendo à alínea a), a solução geral de $Au=\begin{bmatrix}2&0&-2\end{bmatrix}^T$ é
$$u=\begin{bmatrix}-1&0&1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}.$$

c)

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(A+2I)&=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}\right)=\\&=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right)=L\left(\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}\right).\end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ é linearmente independente, é então uma base para $\mathcal{N}(A+2I)$.

d) Atendendo a que

$$\mathcal{N}(A-I)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)=L\left(\{(1,1,1)\}\right)$$

tem-se $\dim \mathcal{N}(A-I)=1$. Assim, como o conjunto

$$\{(1,1,1),(-1,1,0),(-1,0,1)\}$$

é linearmente independente e atendendo à alínea anterior, é então uma base para $\mathcal{N}(A+2I)+\mathcal{N}(A-I)$. Logo

$$\dim\left(\mathcal{N}(A+2I)+\mathcal{N}(A-I)\right)=3.$$

50. a)

$$A_\alpha=\begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix}\underset{\substack{\alpha L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ 0 & \alpha^2-1 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix}.$$

$$\operatorname{car} A_\alpha=\begin{cases} 2 & \text{se} \quad \alpha=1 \\ 3 & \text{se} \quad \alpha=-1 \\ 4 & \text{se} \quad \alpha\neq 1 \text{ e } \alpha\neq -1. \end{cases}$$

$$\mathcal{N}(A_{-1})=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)=L\left(\{(1,-1,0,0)\}\right).$$

$\{(1,-1,0,0)\}$ é uma base para $\mathcal{N}(A_{-1})$.

b) Por a),

$$\mathcal{B}=\{(-1,-1,0,-1),(0,1,1,0),(-1,0,1,1)\}$$

é linearmente independente e gera $\mathcal{C}(A_{-1})$, pelo que $\mathcal{B}$ é uma base para $\mathcal{C}(A_{-1})$. Como

$$(0,0,0,1)=-\frac{1}{2}(-1,-1,0,-1)-\frac{1}{2}(0,1,1,0)+\frac{1}{2}(-1,0,1,1)$$

então $-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ são as coordenadas de $(0,0,0,1)$ na base ordenada $\mathcal{B}$.

c)

$$A_0 u = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow u = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{solução particular de } A_0 u = b} + v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

com

$$v \in \mathcal{N}(A_0) \underset{A_0 \text{ é invertível}}{=} \{\mathbf{0}\}.$$

Solução geral de $A_0 u = b : \{(1, 0, 0, 0)\}$.

d) $\{(-1, 1, 0, -1), (0, 0, 1, 1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A_1)$ e $\{(-1, 1, 0, -1), (0, -1, 1, 0)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A_1)$.

Como

$$\mathcal{B}' = \{(-1, 1, 0, -1), (0, -1, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\}$$

é linearmente independente e gera $\mathcal{L}(A_1) + \mathcal{C}(A_1)$ então $\mathcal{B}'$ é uma base de $\mathcal{L}(A_1) + \mathcal{C}(A_1)$.

e) Por a) e b),

$$\{(-1, -1, 0, -1), (0, 0, 1, 1), (0, 0, 0, 1)\}$$

é uma base de $\mathcal{L}(A_{-1})$ e

$$\{(-1, -1, 0, -1), (0, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, 1)\}$$

é uma base de $\mathcal{C}(A_{-1})$. Como por f)

$$(0, 0, 0, 1) \in \mathcal{C}(A_{-1}) \qquad \text{e} \qquad (0, 0, 1, 1) \notin \mathcal{C}(A_{-1})$$

então $\{(-1, -1, 0, -1), (0, 0, 0, 1)\}$ é uma base $\mathcal{L}(A_1) \cap \mathcal{C}(A_1)$.

51. a)

$$Au - \lambda u = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda = 4.$$

b) $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L(\{(1, 0, -1)\})$.

$\{(1, 0, -1)\}$ é base de $\mathcal{N}(A)$.

c) $Au = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow Au = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \underset{\text{a) e b)}}{\Leftrightarrow} u = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ com $\alpha \in \mathbb{R}$.

d) A equação $Au = b$ tem sempre solução se e só se $b \in \mathcal{C}(A) = L(\{(1,0,1), (0,1,0)\})$.

52. Usando o método de eliminação de Gauss, tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3 \\ L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (*).$$

a) Atendendo a (*) $\dim \mathcal{N}(A) = 4 - \dim \mathcal{C}(A) = 4 - \operatorname{car} A = 4 - 1 = 3$.

b) $\{(1,0,0,0)\}$ não é base de $\mathcal{C}(A)$ uma vez que $(1,0,0,0) \notin \mathcal{C}(A)$. Uma base de $\mathcal{C}(A)$ é por exemplo $\{(1,-1,1,-1)\}$ e $(1,0,0,0) \notin L\{(1,-1,1,-1)\}$.

53. a)

$$\begin{aligned} U &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \ x+y+z+w = 0\} = \\ &= \{(-y-z-w, y, z, w) : y, z, w \in \mathbb{R}\} = \\ &= L(\{(-1,1,0,0), (-1,0,1,0), (-1,0,0,1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto

$$\{(-1,1,0,0), (-1,0,1,0), (-1,0,0,1)\}$$

é uma base para U, uma vez que gera U e, é também linearmente independente.

b) Atendendo a que

$$U = L(\{(1,-1,-1,1), (-1,0,0,1), (-1,1,0,0), (-1,0,1,0)\})$$

e

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

então

$$\{(1,-1,-1,1), (-1,0,0,1), (-1,1,0,0)\}$$

é uma base para U, uma vez que gera U e, é também linearmente independente.

54. Usando o método de eliminação de Gauss, tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underset{-L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

a)

$$\mathcal{N}(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + z = 0 \quad \text{e} \quad y - z = 0\} =$$
$$= \{(-z, z, z) : z \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1, 1, 1)\}).$$

Logo $\{(-1, 1, 1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A)$ uma vez que gera $\mathcal{N}(A)$ e é linearmente independente.

b)

$$\mathcal{C}(A) = L(\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}).$$

Logo, sendo o conjunto

$$S = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\} (\subset \mathbb{R}^3)$$

linearmente independente e tendo em conta que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ então S é uma base de $\mathbb{R}^3$ que inclui duas colunas de A.

c)

$$\mathcal{L}(A) = L(\{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\}).$$

Uma vez que $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$ e $\{(1, 0, 1), (0, 1, -1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$ então

$$\dim \mathcal{L}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = \text{car}\, A = 2.$$

Atendendo a que

$$(1, 0, 1) \in \mathcal{L}(A) \cap \mathcal{C}(A) \qquad \text{e} \qquad (0, 1, -1) \notin \mathcal{C}(A)$$

(uma vez que o "sistema"

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

é impossível) então $\{(1, 0, 1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{C}(A)$, tendo-se $\dim \mathcal{L}(A) \cap \mathcal{C}(A) = 1$.