IST - LEGM e MEC - Álgebra Linear - 1^o semestre 2018/2019

Espaços lineares

1. Verifique que os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, com as operações usuais, não são subespaços de $\mathbb{R}^2$.

   (i) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$ **(ii)** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$

   (iii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ **(iv)** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = \pi\}$

   (v) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{N}_0 \text{ e } y \in \mathbb{R}\}$ **(vi)** $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \pi^2\}$

   (vii) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$

2. Verifique que os seguintes conjuntos, com as operações usuais, são (todos os) subespaços de $\mathbb{R}^2$.

   (i) $\{(0,0)\}$

   (ii) $V_k = \{(x,kx) : x \in \mathbb{R}\}$ com $k \in \mathbb{R}$

   (iii) $U = \{(0,a) : a \in \mathbb{R}\}$

   (iv) $\mathbb{R}^2$

3. No espaço linear $\mathbb{R}^3$, considere o subconjunto $U_k = \{(x,y,k) : x,y \in \mathbb{R}\}$ onde k é uma constante real. Determine os valores de k para os quais U_k é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

4. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$. Diga quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$, com as operações usuais, são subespaços de $\mathbb{R}^3$ e indique os respectivos conjuntos geradores. Escreva ainda cada um dos subespaços na forma $\mathcal{N}(A)$, explicitando a matriz A.

   (i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2\}$

   (ii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0\}$ **(iii)** $\{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\}$

   (iv) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x \text{ e } z = 3x\}$ **(v)** $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 1\}$

   (vi) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y \text{ ou } y = z\}$

   (vii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0 \text{ e } 2y + z = 0\}$

   (viii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xy = 0\}$

5. Diga se os vectores $(-2,2,2,0), (-2,1,1,0), (0,-1,1,-1)$ pertencem aos seguintes subespaços e encontre um conjunto de geradores para cada um desses subespaços do espaço linear $\mathbb{R}^4$.

   (i) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x = 0 \text{ e } y + z = 0\}$

   (ii) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z + w = 0\}$

   (iii) $\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - z = 0 \text{ e } x + y + 2w = 0 \text{ e } y - z + w = 0\}$

6. Seja $\mathcal{P}_n$ o espaço linear de todos os polinómios reais de variável real e de grau menor ou igual a n, com as operações usuais. Diga quais dos seguintes subconjuntos de $\mathcal{P}_2$, com as operações usuais, são subespaços de $\mathcal{P}_2$ e indique os respectivos conjuntos geradores.

   (i) $\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_0 = 0\}$

   (ii) $\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 = 2a_0 \ e \ a_1 = 0\}$

   (iii) $\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_1 = 1\}$

   (iv) $\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 = 2\}$

   (v) $\{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 + 2a_0 = 0\}$

7. Defina por meio de sistemas de equações homogéneas os seguintes subespaços.

   (i) Em $\mathcal{P}_2$: $L(\{1 - t^2, 1 + t\})$

   (ii) $L(\{(1,0,1),(0,1,0),(-2,1,-2)\})$

   (iii) $L(\{(0,1,0),(-2,1,-2)\})$

   (iv) $L(\{(1,1,2),(2,1,1)\})$

   (v) $L(\{(1,0,-1,1)\})$

   (vi) $L(\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(3,-6,11,-1),(0,0,1,-2)\})$

8. Seja $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o espaço linear de todas as matrizes do tipo $m \times n$ com entradas reais. Diga quais dos seguintes subconjuntos de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$, com as operações usuais, são subespaços de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e indique os respectivos conjuntos geradores.

   (i) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : b = a + c \right\}$

   (ii) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & 0 & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : b < 0 \right\}$.

9. Construa uma matriz cujo núcleo seja gerado pelo vector $(2,0,1)$.

10. Existe alguma matriz cujo espaço das linhas contém o vector $(1,1,1)$ e cujo núcleo contém $(1,0,0)$?

11. Verifique que, com as operações usuais, o seguinte conjunto de matrizes

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

   gera o subespaço $\left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \\ 0 & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R}) : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$ do espaço linear $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$.

12. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, os vectores $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (1,0,2)$ e $v_3 = (1,1,0)$. Mostre que os seguintes vectores são combinações lineares de v_1, v_2 e v_3.

   (i) $(3,3,0)$ **(ii)** $(2,1,5)$ **(iii)** $(-1,2,0)$ **(iv)** $(1,1,1)$

13. Determine o valor de k para o qual o vector $u = (1, -2, k) \in \mathbb{R}^3$ é combinação linear dos vectores

$$v = (3, 0, -2) \quad \text{e} \quad w = (2, -1, -5).$$

14. Verifique que os seguintes conjuntos de vectores geram $\mathbb{R}^3$.

(i) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

(ii) $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

(iii) $\{(1, 1, 1), (-1, 1, -1), (1, -1, -1), (-1, -1, 1)\}$

15. Considere, no espaço linear $\mathcal{P}_2$, os vectores $p_1(t) = 2 + t + 2t^2$, $p_2(t) = -2t + t^2$, $p_3(t) = 2 - 5t + 5t^2$ e $p_4(t) = -2 - 3t - t^2$. O vector

$$q(t) = 2 + t + t^2$$

pertence à expansão linear $L(\{p_1(t), p_2(t), p_3(t), p_4(t)\})$? Podem os vectores $p_1(t)$, $p_2(t)$, $p_3(t)$ e $p_4(t)$ gerar $\mathcal{P}_2$?

16. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Verifique que o espaço das linhas de A é igual ao espaço das linhas de B. Conclua então que os espaços das colunas de A^T e de B^T são iguais.

17. Escreva a matriz $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ como combinação linear das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Encontre uma matriz 2×2 que não pertença a

$$L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

18. Considere os subespaços

$$U = L(\{(1, -1, 1), (0, 1, 1)\}), \qquad V = L(\{(1, 1, 2), (-1, 1, 1)\})$$

e determine $u_1, u_2, u_3, v \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$U + V = L(\{u_1, u_2, u_3\}) \qquad \text{e} \qquad U \cap V = L(\{v\}).$$

19. Considere os subespaços

$$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \ \text{ e } \ x + y = 0\right\}, \quad V = L(\{(1, 1, 1)\})$$

e determine $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$U + V = L(\{u_1, u_2\}).$$

Verifique que

$$U \cap V = \{\mathbf{0}\}.$$

20. Considere os subespaços

$$U = L\left(\{(1,0,1),(-1,1,2)\}\right), \quad V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+3z=0\right\}$$

e determine $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$U+V = L\left(\{u_1,u_2,u_3\}\right) \quad \text{e} \quad U \cap V = L\left(\{v\}\right).$$

21. Considere os subespaços

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=y=z\right\}, \quad V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=0\right\}$$

e determine $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ tais que

$$U+V = L\left(\{u_1,u_2,u_3\}\right).$$

Verifique que

$$U \cap V = \{\mathbf{0}\}.$$

22. Considere os subespaços

$$U = L\left(\left\{1+t, 1-t^2\right\}\right), \quad V = \left\{a_0+a_1t+a_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2-a_1+a_0=0\right\}$$

e determine $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathcal{P}_2$ tais que

$$U+V = L\left(\{u_1,u_2\}\right) \quad \text{e} \quad U \cap V = L\left(\{v_1,v_2\}\right).$$

23. Considere os subespaços

$$U = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : \ p(1)=0\}, \quad V = L(\{1-t, t-t^2, -1+t^2\})$$

e determine $u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathcal{P}_2$ tais que

$$U+V = L\left(\{u_1,u_2\}\right) \quad \text{e} \quad U \cap V = L\left(\{v_1,v_2\}\right).$$

24. Considere os subespaços

$$U = L\left(\left\{1+t, 1-t^3\right\}\right), \quad V = L\left(\left\{1+t+t^2, t-t^3, 1+t+t^3\right\}\right)$$

e determine $u_1, u_2, u_3, u_4, v \in \mathcal{P}_3$ tais que

$$U+V = L\left(\{u_1,u_2,u_3,u_4\}\right) \quad \text{e} \quad U \cap V = L\left(\{v\}\right).$$

Determine ainda um subespaço W de $\mathcal{P}_3$ tal que $U \oplus W = \mathcal{P}_3$.

25. Sejam

$$U = L\left(\{(1,0,-1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}\right)$$

e

$$V = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y+w=0\right\}$$

subespaços do espaço linear $\mathbb{R}^4$.

a) Determine uma matriz $A \in \mathcal{M}_{1\times 4}(\mathbb{R})$ tal que $U = \mathcal{N}(A)$.

b) Determine $u \in \mathbb{R}^4$ tal que $U + L\left(\{u\}\right) = \mathbb{R}^4$.

c)Determine $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^4$ tais que $U \cap V = L\left(\{w_1,w_2\}\right)$.

26. Determine as condições que os parametros $\alpha_i, \beta_i (i = 1, 2)$ devem verificar para que os vectores $(\alpha_1, \beta_1, 3)$ e $(\alpha_2, \beta_2, 9)$, no espaço linear $\mathbb{R}^3$, sejam linearmente independentes.

27. Diga se os seguintes conjuntos de vectores em $\mathbb{R}^3$ são linearmente dependentes ou linearmente independentes? Nos casos em que sejam linearmente dependentes, indique (para cada um) um subconjunto linearmente independente com o maior n^o possível de elementos e escreva os restantes como combinação linear desses vectores.

    (i) $\{(4, 2, 1), (2, 6, -5), (1, -2, 3)\}$ **(ii)** $\{(1, 2, -1), (3, 2, 5)\}$

    (iii) $\{(1, 2, 3), (1, 1, 1), (1, 0, 1)\}$ **(iv)** $\{(1, 0, -1), (0, 0, 0), (0, 1, 1)\}$

    (v) $\{(1, 1, 0), (0, 2, 3), (1, 2, 3), (x, y, z)\}$ (com $x, y, z \in \mathbb{R}$).

28. Determine a tal que $\{(a^2, 0, 1), (0, a, 2), (1, 0, 1)\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$.

29. Sejam $U = L(\{(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0)\})$ e $V_k = L(\{(2, k, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\})$ subespaços de $\mathbb{R}^4$. Determine os valores de k para os quais $\dim(U \cap V_k) = 1$.

30. Verifique que os seguintes subconjuntos do espaço linear de todas as funções reais de variável real são linearmente dependentes. Indique (para cada um) um subconjunto linearmente independente com o maior n^o possível de elementos e escreva os restantes como combinação linear desses vectores.

    (i) $S = \{\cos^2 t, \operatorname{sen}^2 t, \cos 2t\}$ **(ii)** $S = \{2, \operatorname{sen}^2 t, \cos^2 t\}$

    (iii) $S = \{e^t, e^{-t}, \cosh t\}$ **(iv)** $S = \left\{1, t, t^2, (t+1)^2\right\}$

    Determine uma base para cada subespaço $L(S)$ e calcule a respectiva dimensão.

31. Seja V o espaço linear de todas as funções reais de variável real. Sejam $f, g, h \in V$, com $f(t) = \operatorname{sen} t$, $g(t) = \cos t$ e $h(t) = t$. Mostre que o conjunto $\{f, g, h\}$ é linearmente independente.

32. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^2$. Caso não sejam bases, determine subconjuntos desses conjuntos que sejam bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses subconjuntos. Em cada base de $\mathbb{R}^2$ encontrada, determine as coordenadas do vector $(0, -1)$ em cada base ordenada encontrada. Relativamente a cada base ordenada de $\mathbb{R}^2$, determine ainda o vector cujas coordenadas são $(0, -1)$.

    (i) $\{(1, 3), (1, -1)\}$ **(ii)** $\{(0, 0), (1, 2)\}$ **(iii)** $\{(2, 4)\}$

    (iv) $\{(-5, 0), (0, 2)\}$ **(v)** $\{(1, 2), (2, -3), (3, 2)\}$ **(vi)** $\{(1, 0), (0, 1)\}$

33. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^3$. Caso não sejam bases, determine subconjuntos desses conjuntos que sejam bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses subconjuntos. Em cada base de $\mathbb{R}^3$ encontrada, determine as coordenadas do vector $(-1, 1, -2)$ em cada base ordenada encontrada. Relativamente a cada base ordenada de $\mathbb{R}^3$, determine ainda o vector cujas coordenadas são $(-1, 1, -2)$.

    (i) $\{(1, 2, 3), (0, 0, 0), (0, 1, 2)\}$ **(ii)** $\{(1, 2, 0), (0, 1, -1)\}$

    (iii) $\{(3, 2, 2), (-1, 2, 1), (0, 1, 0)\}$ **(iv)** $\{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$

    (v) $\{(1, 1, -1), (2, 3, 4), (4, 1, -1), (0, 1, -1)\}$ **(vi)** $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

34. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathbb{R}^4$. Caso não sejam bases, determine subconjuntos desses conjuntos que sejam bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses subconjuntos. Em cada alínea indique uma base de $\mathbb{R}^4$ que inclua pelo menos dois vectores do conjunto apresentado.

(i) $\{(1,0,0,1),(0,1,0,0),(1,1,1,1),(0,1,1,1)\}$

(ii) $\{(1,-1,0,2),(3,-1,2,1),(1,0,0,1)\}$

(iii) $S=\{(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,1,0),(0,0,1,1)\}$

(iv) $\{(1,0,0,2),(1,0,2,0),(1,2,0,0),(3,0,0,0)\}$

(v) $\{(1,-2,5,-3),(2,-4,6,2),(3,-6,11,-1),(0,0,5,5)\}$

(vi) $S=\{(2,1,-1,2),(-1,-1,1,2),(4,-2,2,-2),(5,-2,2,2)\}$. Nesta alínea, verifique que $(8,-3,3,5)\in L(S)$ e determine uma base de $L(S)$ que inclua o vector $(8,-3,3,5)$.

35. Determine as coordenadas de $p(t)=t$ na base ordenada $\{2-t,2+t\}$ de $\mathcal{P}_1$. ($\mathcal{P}_1$ é o espaço linear dos polinómios reais de grau menor ou igual a 1.)

36. Diga quais dos seguintes conjuntos de vectores são bases de $\mathcal{P}_2$ (espaço linear dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2). Caso não sejam bases, determine subconjuntos desses conjuntos que sejam bases e as dimensões dos espaços gerados por cada um desses subconjuntos. Determine as coordenadas do vector $1-t$ em cada base ordenada de $\mathcal{P}_2$ encontrada. Relativamente a cada base ordenada de $\mathcal{P}_2$, determine ainda o vector cujas coordenadas são $(-1,3,2)$.

(i) $\{2t-t^2,1-2t^2,2+t,1-4t\}$ **(ii)** $\{1+t^2,t-t^2,1-t+2t^2,1+t\}$

(iii) $\{1+2t-t^2,3+t^2,5+4t-t^2,-2+2t-t^2\}$

37. Verifique que os seguintes subconjuntos de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ são subespaços de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ relativamente às operações usuais e determine uma base para cada um deles indicando as respectivas dimensões.

(i) $\{A\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}):\operatorname{tr}A=0\}$ **(ii)** $\left\{A\in\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}):A\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}A\right\}$

38. Mostre que as matrizes $\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}0&0\\1&1\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$ formam uma base para o espaço linear $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

39. Seja $S=\left\{\begin{bmatrix}1&3\\-1&2\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&11\\-5&3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2&-5\\3&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4&1\\1&5\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3&-2\\2&3\end{bmatrix}\right\}$. Seja W um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ gerado por S. Determine uma base para W que inclua vectores de S.

40. Determine uma base para $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$. Qual é a dimensão do espaço linear $\mathcal{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$?

41. Determine uma base para cada um dos seguintes subespaços de $\mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e calcule a respectiva dimensão:

(i) O conjunto de todas as matrizes (reais) diagonais do tipo 3×3.

(ii) O conjunto de todas as matrizes (reais) simétricas do tipo 3×3.

42. Determine as dimensões e indique bases para: o núcleo, o espaço das linhas e o espaço das colunas das seguintes matrizes.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Determine tambem a característica e a nulidade de cada uma delas.

43. Quais são as matrizes do tipo 3×3 cujo núcleo tem dimensão 3?

44. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{C}(A) = \mathcal{N}(A)$. Prove que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ com n par. Dê um exemplo para $n = 4$.

45. Sejam U e V subespaços de W tais que $\dim U = 4, \dim V = 5$ e $\dim W = 7$. Diga quais as dimensões possíveis para $U \cap V$.

46. Determine bases e calcule as dimensões de $U + V$ e $U \cap V$, dizendo em que casos $U + V$ é a soma directa $U \oplus V$ (determine-a) dos subespaços U e V.

(i) $U = L\left(\{(1,-1,1),(0,1,1)\}\right), V = L\left(\{(1,1,2),(-1,1,1)\}\right)$ em $\mathbb{R}^3$.

(ii) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0 \text{ e } x + y = 0\}, \ V = L\left(\{(1,1,1)\}\right)$ em $\mathbb{R}^3$.

(iii) $U = L\left(\{(1,0,1),(-1,1,2)\}\right), V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + 3z = 0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(iv) $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}, V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(v) $U = L\left(\{1+t, 1-t^2\}\right), \quad V = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in \mathcal{P}_2 : a_2 - a_1 + a_0 = 0\}$ em $\mathcal{P}_2$.

(vi) $U = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : \ p(-1) = 2p(0) - p(1)\}, \quad V = L(\{-1+t, 1-t^2\})$ em $\mathcal{P}_2$.

(vii) $U = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : \ p(1) = 0\}, \quad V = L(\{1-t, t-t^2, -1+t^2\})$ em $\mathcal{P}_2$.

(viii) $U = L\left(\{1+t, 1-t^3\}\right), \quad V = L\left(\{1+t+t^2, t-t^3, 1+t+t^3\}\right)$ em $\mathcal{P}_3$.

(ix) $U = L\left(\{(2,-2,1,-2),(-1,1,1,3),(0,0,-6,-8),(-1,1,-5,-5)\}\right)$,
$V = L\left(\{(0,0,0,-1),(0,1,2,3),(0,2,4,8)\}\right)$ em $\mathbb{R}^4$.

(x) $U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y + 3z = 0 \text{ e } y + 2z + 3w = 0\}$,
$V = L\left(\{(2,5,-4,1),(0,9,-6,1),(-4,-1,2,-1)\}\right)$ em $\mathbb{R}^4$.

Neste alínea **(viii)** mostre que $U = V$.

(xi) Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por $\{(1,-1,-1,-2,0),(1,-2,-2,0,-3),(1,-1,-2,-2,1)\}$.
Seja V o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado por $\{(1,-2,-3,0,-2),(1,-1,-3,2,-4),(1,-1,-2,2,-5)\}$.

Comece por escrever U e V como soluções de sistemas de equações lineares homogéneas.

(xii) Sejam U e V subespaços de $\mathbb{R}^4$ gerados respectivamente por F e por G, com

$$\begin{aligned} F &= \{(1,0,-1,0),(0,1,1,1),(1,0,0,-2),(0,0,-1,2)\}, \\ G &= \{(1,1,1,1),(1,2,0,-1),(0,0,1,1)\}. \end{aligned}$$

47. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Calcule a nulidade e a característica de A.

(ii) Determine bases para o espaço das colunas de A e para o núcleo de A.

(iii) Usando a alínea anterior, determine a solução geral do sistema de equações lineares homogéneo $Au = \mathbf{0}$.

(iv) Resolva o sistema de equações $Au = b$, com $b = (1, 0, 2, -1, 0)$. Note que b é igual à 1^a coluna de A e use esse facto de modo a encontrar uma solução particular de $Au = b$.

48. Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Determine uma base para $\mathcal{N}(A + B)$.

b) Determine $\dim(\mathcal{N}(A) + \mathcal{N}(B))$.

49. Seja

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine uma base para $\mathcal{C}(A)$.

b) Resolva a equação: $Au = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T$.

c) Determine uma base para $\mathcal{N}(A + 2I)$.

d) Calcule $\dim(\mathcal{N}(A + 2I) + \mathcal{N}(A - I))$.

50. Seja

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix},$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$. Sejam $\mathcal{C}(A_\alpha)$, $\mathcal{L}(A_\alpha)$ e $\mathcal{N}(A_\alpha)$, respectivamente, o espaço das colunas, o espaço das linhas e o núcleo de A_α. Sejam A_0, A_{-1} e A_1 as matrizes que se obtêm de A_α fazendo respectivamente $\alpha = 0$, $\alpha = -1$ e $\alpha = 1$.

a) Determine uma base para $\mathcal{N}(A_{-1})$.

b) Determine uma base para $\mathcal{C}(A_{-1})$ e calcule as coordenadas de $(0, 0, 0, 1)$ nessa base.

c) Determine a solução geral do sistema de equações lineares $A_0 u = b$, onde b é igual à 1^a coluna da matriz A_0.

d) Determine uma base para $\mathcal{L}(A_1) + \mathcal{C}(A_1)$.

e) Determine uma base para $\mathcal{L}(A_{-1}) \cap \mathcal{C}(A_{-1})$.

51. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Determine o n^o real λ para o qual $u = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ é solução da equação: $Au - \lambda u = \mathbf{0}$.

b) Determine uma base para $\mathcal{N}(A)$.

c) Resolva a equação: $Au = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 \end{bmatrix}^T$.

d) Determine todos os vectores b para os quais a equação $Au = b$ tenha sempre solução.

52. Considere a matriz dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine, justificando, a dimensão do núcleo de A.

b) Diga, justificando, se $\{(1,0,0,0)\}$ é uma base do espaço das colunas de A.

53. Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^4$:

$$U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \; x+y+z+w = 0\}.$$

a) Determine uma base para U.

b) Determine uma base para U que inclua os vectores $(1,-1,-1,1)$ e $(-1,0,0,1)$.

54. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

a) Determine uma base para $\mathcal{N}(A)$.

b) Determine uma base para $\mathbb{R}^3$ que inclua duas colunas de A.

c) Determine uma base para $\mathcal{L}(A) \cap \mathcal{C}(A)$.