Instituto Superior Técnico - 1^o Semestre 2006/2007

Cálculo Diferencial e Integral I

LEA-pB, LEM-pB, LEN-pB, LEAN, MEAer e MEMec

Soluções da 8^a Ficha de Exercícios

1. Determine os pontos onde a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3$ tem máximos ou mínimos locais.

   Resolução:

   f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 3x^3 + 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 3x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 2)$.

   f' é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $(f')'(x) = f''(x) = 4x^3 - 9x^2 + 4x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   Como $f'(1) = 0$ e $f''(1) = -1 < 0$, então $f(1) = \dfrac{7}{60}$ é máximo local de f.

   Como $f'(2) = 0$ e $f''(2) = 4 > 0$, então $f(2) = -\dfrac{4}{15}$ é mínimo local de f.

   f'' é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $(f'')'(x) = f'''(x) = 12x^2 - 18x + 4$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   Como $f'(0) = f''(0) = 0$ e $f'''(0) = 4 \neq 0$, com $n = 3$ ímpar, então 0 é ponto de inflexão de f.

2. Determine os pontos onde a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{12}x^4$ tem pontos de inflexão.

   Resolução:

   f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   f' é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $(f')'(x) = f''(x) = x^3 - x^2$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \text{ ou } x = 1)$.

   f'' é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $(f'')'(x) = f'''(x) = 3x^2 - 2x$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   f''' é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $(f''')'(x) = f^{(4)}(x) = 6x - 2$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

   Como $f''(1) = 0$ e $f'''(1) = 1 \neq 0$, com $n = 3$ ímpar, então $x = 1$ é ponto de inflexão de f.

   Como $f''(0) = f'''(0) = 0$ e $f^{(4)}(0) = -2 < 0$, com $n = 4$ par, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $x = 0$. Logo $x = 0$ não é ponto de inflexão de f.

3. Escreva cada uma das seguintes funções como soma de potências de $x + 2$.

   (i) $x^3 + x^2 + x + 1$ **(ii)** $x^3 - 2x^2 - 5x - 2$

   Resolução:

   (i) Seja $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ e considere-se a fórmula de Taylor de ordem 3 no ponto $x_0 = -2$. Tem-se

   $$f(x) = P_3(x) + R_3(x),$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$, com

$$P_3(x) = f(-2) + f'(-2)(x-(-2)) + \frac{f''(-2)}{2!}(x-(-2))^2 + \frac{f'''(-2)}{3!}(x-(-2))^3$$

e

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-(-2))^4,$$

com c entre -2 e x.

f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo $f'(-2) = 9$.

f' é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $(f')'(x) = f''(x) = 6x + 2$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo $f''(-2) = -10$.

f'' é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $(f'')'(x) = f'''(x) = 6$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo $f'''(-2) = 6$.

f''' é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $(f''')'(x) = f^{(4)}(x) = 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo $f^{(4)}(c) = 0$.

Tem-se então $R_3(x) = 0$ e

$$f(x) = P_3(x) + R_3(x) = -5 + 9(x+2) - 5(x+2)^2 + (x+2)^3,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Seja $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ e considere-se a fórmula de Taylor de ordem 3 no ponto $x_0 = -2$. Tem-se

$$f(x) = P_3(x) + R_3(x),$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$, com

$$P_3(x) = f(-2) + f'(-2)(x-(-2)) + \frac{f''(-2)}{2!}(x-(-2))^2 + \frac{f'''(-2)}{3!}(x-(-2))^3$$

e

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-(-2))^4,$$

com c entre -2 e x.

f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 3x^2 - 4x - 5$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo $f'(-2) = 15$.

f' é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $(f')'(x) = f''(x) = 6x - 4$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo $f''(-2) = -16$.

f'' é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $(f'')'(x) = f'''(x) = 6$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo $f'''(-2) = 6$.

f''' é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $(f''')'(x) = f^{(4)}(x) = 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo $f^{(4)}(c) = 0$.

Tem-se então $R_3(x) = 0$ e

$$f(x) = P_3(x) + R_3(x) = -8 + 15(x+2) - 8(x+2)^2 + (x+2)^3,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

4. Estabeleça o desenvolvimento binomial

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= 1 + nx + \tbinom{n}{2}x^2 + \cdots + \tbinom{n}{p}x^p + \cdots + x^n = \\ &= \tbinom{n}{0} + \tbinom{n}{1}x + \tbinom{n}{2}x^2 + \cdots + \tbinom{n}{p}x^p + \cdots + \tbinom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^{n}\tbinom{n}{k}x^k,\end{aligned}$$

com $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ (combinações de n elementos k a k), usando a fórmula de Taylor.

Resolução:

Seja $n \in \mathbb{N}$. Seja $f(x) = (1+x)^n$ e considere-se a fórmula de Taylor de ordem n no ponto $x_0 = 0$. Tem-se

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$, com

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(p)}(0)}{p!}x^p + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

e

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

com c entre 0 e x.

f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo $f'(0) = n$.

f' é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$(f')'(x) = f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2},$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo $f''(0) = n(n-1)$.

Prova-se por indução que, para todo o $p = 1, \ldots, n+1$, $f^{(p-1)}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$\left(f^{(p-1)}\right)'(x) = f^{(p)}(x) = n(n-1)\ldots(n-(p-1))(1+x)^{n-p},$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo

$$f^{(p)}(0) = n(n-1)\ldots(n-(p-1)),$$

para todo o $= 1, \ldots, n+1$.

$f^{(n)}$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $\left(f^{(n)}\right)'(x) = f^{(n+1)}(x) = 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo $f^{(n+1)}(c) = 0$.

Assim, tem-se $R_n(x) = 0$ e

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) =$$

$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(p-1))}{p!}x^p + \cdots + \frac{n(n-1)\ldots(n-(n-1))}{n!}x^n =$$

$$= \frac{n!}{(n-0)!0!} + \frac{n!}{(n-1)!1!}x + \frac{n!}{(n-2)!2!}x^2 + \cdots + \frac{n!}{(n-p)!p!}x^p + \cdots + \frac{n!}{(n-n)!n!}x^n =$$

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{p}x^p + \cdots + \binom{n}{n}x^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

5. **(i)** Determine o polinómio de Taylor P_2 de ordem 2 relativamente à função $f(x) = 2\log(\cos x)$ e ao ponto $x_0 = 0$.

(ii) Indique um majorante do erro que se comete ao aproximar f pelo polinómio P_2 (determinado na alínea anterior) no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Resolução:

(i) O polinómio de Taylor de ordem 2 relativamente à função f e ao ponto $x_0 = 0$, é dado por:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)}{2!}x^2.$$

Seja $f(x) = 2\log(\cos x)$. Tem-se $f(0) = 0$. Seja $A = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right[$.

f é diferenciável em A e $f'(x) = 2\frac{1}{\cos x}(-\operatorname{sen} x) = -2\operatorname{tg} x$, para todo o $x \in A$. Logo $f'(0) = 0$.

f' é diferenciável em A e $(f')'(x) = f''(x) = -2\frac{1}{\cos^2 x}$, para todo o $x \in A$. Logo $f''(0) = -2$.

Assim, tem-se

$$P_2(x) = -x^2.$$

(ii) Considere-se a fórmula de Taylor de ordem 2 no ponto $x_0 = 0$. Tem-se

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x),$$

para todo o $x \in A$, com

$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}x^3,$$

e c entre x e 0.

f'' é diferenciável em A e $(f'')'(x) = f'''(x) = -2\frac{-2\cos x(-\operatorname{sen} x)}{\cos^4 x} = \frac{-4\operatorname{sen} x}{\cos^3 x}$, para todo o $x \in A$. Logo $f''(c) = \frac{-4\operatorname{sen} c}{\cos^3 c}$.

Como

$$|f(x) - P_2(x)| = |R_2(x)|$$

e considerando o intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$, tem-se

$$\left|2\log(\cos x) - \left(-x^2\right)\right| = |R_2(x)| = \left|\frac{f'''(c)}{3!}x^3\right| = \frac{|f'''(c)|}{3!}|x|^3 = \frac{\left|\frac{-4\operatorname{sen} c}{\cos^3 c}\right|}{3!}|x|^3 =$$

$$= \frac{2}{3}\frac{|\operatorname{sen} c|}{|\cos c|^3}|x|^3 \le \frac{2}{3}\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = \frac{2}{3}2\left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = \frac{\pi^3}{48},$$

para todo o $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

Deste modo, $\frac{\pi^3}{48}$ é um majorante do erro que se comete ao aproximar f pelo polinómio P_2 no intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

6. Como se pode obter $\operatorname{sen}(10^o)$ com erro inferior a 10^{-4} usando a fórmula de Taylor?

   Resolução:

   10^o corresponde a $\frac{\pi}{18}$. Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. Pretende-se determinar o menor número natural n que verifique
   $$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{18}\right) - P_n\left(\frac{\pi}{18}\right)\right| = \left|R_n\left(\frac{\pi}{18}\right)\right| < 10^{-4}.$$
   Seja $x_0 = 0$. Tem-se $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$, com c entre 0 e x. Como $\left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq 1$, pois $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \operatorname{sen} x$ e $f^{(2n-1)}(x) = (-1)^{n+1}\cos x$, para todo o $n \in \mathbb{N}$ e para todo o $x \in \mathbb{R}$, tem-se
   $$\left|\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{18}\right) - P_n\left(\frac{\pi}{18}\right)\right| = \left|R_n\left(\frac{\pi}{18}\right)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{n+1}\right| =$$
   $$= \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{n+1}.$$
   Basta então determinar o menor número natural n que verifique
   $$\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{n+1} < 10^{-4}.$$
   O menor número natural n que verifica a desigualdade anterior é $n = 3$. Logo
   $$\operatorname{sen}(10^o) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{18}\right) \approx P_3\left(\frac{\pi}{18}\right) = f(0) + f'(0)\frac{\pi}{18} + \frac{f''(0)}{2!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 =$$
   $$= \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 \approx 0.173\,65.$$

7. Determine um polinómio que aproxime a função sen no intervalo $[-1, 1]$ com um erro inferior a 10^{-3}.

   Resolução:

   Seja $f(x) = \operatorname{sen} x$. Pretende-se determinar o menor número natural n que verifique
   $$|\operatorname{sen} x - P_n(x)| = |R_n(x)| < 10^{-3},$$
   para todo o $x \in [-1, 1]$. Seja $x_0 = 0$. Tem-se $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}$, com c entre 0 e x. Como $\left|f^{(n+1)}(c)\right| \leq 1$, pois $f^{(2n)}(x) = (-1)^n \operatorname{sen} x$ e $f^{(2n-1)}(x) = (-1)^{n+1}\cos x$, para todo o $n \in \mathbb{N}$ e para todo o $x \in \mathbb{R}$, tem-se
   $$|\operatorname{sen} x - P_n(x)| = |R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| =$$

$$= \frac{\left|f^{(n+1)}(c)\right|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{1}{(n+1)!},$$

para todo o $x \in [-1,1]$. Basta então determinar o menor número natural n que verifique

$$\frac{1}{(n+1)!} < 10^{-3}.$$

O menor número natural n que verifica a desigualdade anterior é $n = 6$. Logo, como

$$f(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = f^{(6)}(0) = 0,$$

tem-se

$$|\operatorname{sen} x - P_6(x)| = \left|\operatorname{sen} x - \left(f'(0)\,x + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5\right)\right| =$$

$$= \left|\operatorname{sen} x - \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5\right)\right| = |R_6(x)| =$$

$$= \frac{\left|f^{(7)}(c)\right|}{7!} |x|^{n+1} \leq \frac{1}{5040} < 10^{-3},$$

para todo o $x \in [-1,1]$.

Assim, o polinómio $x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$ aproxima a função sen no intervalo $[-1,1]$ com um erro inferior a 10^{-3}.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $f'(0) = 0$ e $f''(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$. Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = f(\operatorname{sen} x)$.

   (i) Determine os extremos locais de φ.

   (ii) O que pode dizer sobre o número de soluções da equação $\varphi''(x) = 0$?

   Resolução:

   (i) φ é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e tem-se

$$\varphi'(x) = f'(\operatorname{sen} x)\cos x$$

e

$$\varphi''(x) = f''(\operatorname{sen} x)\cos x \cos x + f'(\operatorname{sen} x)(-\operatorname{sen} x) = f''(\operatorname{sen} x)\cos^2 x - f'(\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} x,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$.

Como $f''(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, então f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$. Por outro lado, como $f'(0) = 0$, então $f'(x) > 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}^+$, e $f'(x) < 0$ para todo o $x \in \mathbb{R}^-$. Assim, o único zero de f' é atingido no ponto $x = 0$.

Como φ é diferenciável em $\mathbb{R}$, os únicos pontos candidatos a extremos locais são os pontos em que φ' se anula.

$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(\operatorname{sen} x)\cos x = 0 \Leftrightarrow (f'(\operatorname{sen} x) = 0 \text{ ou } \cos x = 0) \Leftrightarrow (\operatorname{sen} x = 0 \text{ ou } \cos x = 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{k\pi}{2}$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Tem-se

$$\varphi''\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=-f'\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)<0$$

e

$$\varphi''(k\pi)=f''(0)>0,$$

para todo o $k\in\mathbb{Z}$.

Deste modo, como $\varphi'\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=0$ e $\varphi''\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)<0$, então os pontos $\frac{\pi}{2}+k\pi$ são máximos locais de φ, para todo o $k\in\mathbb{Z}$.

E como $\varphi'(k\pi)=0$ e $\varphi''(k\pi)>0$, então os pontos $k\pi$ são mínimos locais de φ, para todo o $k\in\mathbb{Z}$.

(ii) Atendendo à alínea anterior, φ' tem um número infinito de zeros. Pelo Teorema de Rolle, entre dois zeros de φ' existe pelo menos um zeros de $(\varphi')'=\varphi''$. Logo, a equação $\varphi''(x)=0$ tem um número infinito de soluções.

9. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e

$$\lim_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty,\qquad\qquad \lim_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty.$$

(i) Mostre que existe um único $c\in\mathbb{R}$ tal que $f'(c)=0$, e que $f(c)$ é o mínimo absoluto de f.

(ii) Sendo m esse mínimo absoluto, seja $b\in\,]m,+\infty[$. Verifique que o conjunto

$$f^{-1}(b)=\{x\in\mathbb{R}:f(x)=b\}$$

tem exactamente dois elementos.

Resolução:

(i) Como $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, então f' é contínua em $\mathbb{R}$.

Sendo f' é contínua em $\mathbb{R}$ e tendo-se $\lim_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$ e $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$, então, pelo Teorema de Bolzano, existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $f'(c)=0$. Por outro lado, como por hipótese f' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, então o zero de f' é único, isto é, existe um único $c\in\mathbb{R}$ tal que $f'(c)=0$.

Sendo f' estritamente crescente em $\mathbb{R}$ e tendo-se $f'(c)=0$, então $f'(x)>0$ para todo o $x>c$, e $f'(x)<0$ para todo o $x<c$. Logo, f é estritamente crescente em $]c,+\infty[$ e f é estritamente decrescente em $]-\infty,c[$, e como f é contínua em c, então f é estritamente crescente em $[c,+\infty[$ e f é estritamente decrescente em $]-\infty,c]$.

Atendendo a que f é estritamente crescente em $[c,+\infty[$ e f é estritamente decrescente em $]-\infty,c]$, então $f(c)$ é o mínimo absoluto de f.

(ii) Seja m o mínimo absoluto de f. Seja $b\in\,]m,+\infty[$. Atendendo ao Teorema de Bolzano e uma vez que $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, o conjunto

$$f^{-1}(b)=\{x\in\mathbb{R}:f(x)=b\}$$

tem pelo menos dois elementos. Atendendo ao Teorema de Rolle e uma vez que f' tem um único zero, o conjunto $f^{-1}(b)$ não tem mais de dois elementos. Logo, o conjunto $f^{-1}(b)$ tem exactamente dois elementos.

10. Seja $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ diferenciável em $]0, +\infty[$ tal que

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = b \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}.$$

Mostre que $b = 0$.

Resolução:

Seja $x \in \mathbb{R}^+$. Como f é contínua em $[x, x+1]$ e diferenciável em $]x, x+1[$, pelo Teorema de Lagrange existe $c_x \in]x, x+1[$ tal que

$$f'(c_x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f(x+1) - f(x).$$

Assim, como $x \to +\infty \Rightarrow c_x \to +\infty$ e uma vez que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = b$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, então

$$b = \lim_{x\to+\infty} f'(c_x) = \lim_{x\to+\infty} (f(x+1) - f(x)) = \lim_{x\to+\infty} f(x+1) - \lim_{x\to+\infty} f(x) = a - a = 0.$$

11. Seja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ contínua em $[0, 2]$, diferenciável em $]0, 2[$ e tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e $f(2) = 1$.

(i) Mostre que existe $c_1 \in]0, 1[$ tal que $f'(c_1) = 1$.

(ii) Mostre que existe $c_2 \in]1, 2[$ tal que $f'(c_2) = 0$.

(iii) Mostre que existe $c \in]0, 2[$ tal que $f'(c) = \frac{1}{5}$.

Resolução:

(i) Como $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[0, 1]$ e diferenciável em $]0, 1[$, então pelo Teorema de Lagrange, existe $c_1 \in]0, 1[$ tal que

$$f'(c_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 1.$$

ou (em alternativa): Seja $g(x) = f(x) - x$. Como $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[0, 1]$, diferenciável em $]0, 1[$ e

$$g(0) = f(0) = 0, \qquad g(1) = f(1) - 1 = 1 - 1 = 0,$$

então $g(0) = g(1)$, e assim, pelo Teorema de Rolle, existe $c_1 \in]0, 1[$ tal que $g'(c_1) = 0$. Como $g'(x) = f'(x) - 1$, então existe $c_1 \in]0, 1[$ tal que $f'(c_1) = 1$.

(ii) Como $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[1, 2]$ e diferenciável em $]1, 2[$, então pelo Teorema de Lagrange, existe $c_2 \in]1, 2[$ tal que

$$f'(c_2) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = 0.$$

ou (em alternativa): Como $f : [1, 2] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[1, 2]$, diferenciável em $]1, 2[$ e

$$f(1) = f(2),$$

então, pelo Teorema de Rolle, existe $c_2 \in \left]1,2\right[$ tal que $f'(c_2) = 0$.

(iii) Por **(i)**, existe $c_1 \in \left]0,1\right[$ tal que $f'(c_1) = 1$. Por **(ii)**, existe $c_2 \in \left]1,2\right[$ tal que $f'(c_2) = 0$. Como f é diferenciável em $[c_1, c_2]$ e $\frac{1}{5}$ está entre $f'(c_1) = 1$ e $f'(c_2) = 0$, então, pelo Teorema de Darboux, existe $c \in \left]c_1, c_2\right[$ tal que $f'(c) = \frac{1}{5}$. Logo, existe $c \in \left]0,2\right[$ tal que $f'(c) = \frac{1}{5}$.

12. Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log x^2 & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases} \qquad g(x) = \lim \frac{1}{1 + x^{2n}}$$

(i) Estude f e g quanto à continuidade.

(ii) Justifique que, qualquer que seja $a > 0$, ambas as funções f e g têm máximo e mínimo no intervalo $[-a, a]$.

Resolução:

(i) f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ por resultar de operações sobre funções contínuas em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 \log x^2 = \lim_{x\to 0^+} x^2 2\log|x| = \lim_{x\to 0^+} x^2 2\log x \underset{(0\infty)}{=}$$

$$\underset{(0\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{2\log x}{\frac{1}{x^2}} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{(\mathrm{RC})}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{2}{x}}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \left(-x^2\right) = 0.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x^2 \log x^2 = \lim_{x\to 0^-} x^2 2\log|x| = \lim_{x\to 0^-} x^2 2\log(-x) \underset{(0\infty)}{=}$$

$$\underset{(0\infty)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{2\log(-x)}{\frac{1}{x^2}} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{(\mathrm{RC})}{=}} \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{2}{-x}(-1)}{\frac{-2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^-} \left(-x^2\right) = 0.$$

Como $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$, então f é contínua no ponto 0. Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$.

$$g(x) = \lim \frac{1}{1 + x^{2n}} = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1, \\ \frac{1}{2} & \text{se } |x| = 1, \\ 0 & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

Logo, g é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, uma vez que é uma função constante se $|x| < 1$ e também é uma função constante se $|x| > 1$. Para $x = 1$, tem-se $\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} 0 = 0 \neq \frac{1}{2} = g(1)$. Logo, g não é contínua no ponto $x = 1$. Para $x = -1$, tem-se $\lim_{x\to -1^+} g(x) = \lim_{x\to -1^+} 1 = 1 \neq \frac{1}{2} = g(-1)$. Logo, g não é contínua no ponto $x = -1$. Deste modo g é apenas contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

(ii) Seja $a > 0$. Como f é contínua em $\mathbb{R}$, então f é contínua no intervalo limitado e fechado $[-a, a]$, e assim, pelo Teorema de Weierstrass, a função f tem máximo e mínimo no intervalo $[-a, a]$.

Por outro lado, tem-se

$$g(2) = 0 \leq g(x) \leq 1 = g\left(\frac{1}{2}\right),$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo, g tem máximo e mínimo em $\mathbb{R}$, e portanto, tem máximo e mínimo no intervalo $[-a, a]$.

13. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a \operatorname{sen} x + 1 & \text{se } x \leq 0, \\ \\ x^2 \log x + b & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(i) Determine a e b de modo a que f seja diferenciável no ponto $x = 0$.

(ii) Para $b = 1$ determine os valores de a para os quais f não tem extremo no ponto 0. Justifique.

Resolução:

(i) Se f fôr diferenciável no ponto 0, então f é contínua no ponto 0.

A função f é contínua no ponto 0 se e só se $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$. Tem-se

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(x^2 \log x + b\right) = 0 + b = b,$$

pois

$$\lim_{x \to 0^+} x^2 \log x \underset{(0\infty)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x^2}} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{(\text{RC})}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0.$$

Como $f(0) = 1$, então $b = 1$. (Note que neste caso não foi necessário calcular $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ para encontrar o valor de b.)

A função f é diferenciável no ponto 0 se e só se $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \in \mathbb{R}$. Tem-se

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 \log x + b - 1}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 \log x}{x} = \lim_{x \to 0^+} x \log x = 0,$$

atendendo a que

$$\lim_{x \to 0^+} x \log x \underset{(0\infty)}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{(\text{RC})}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0.$$

Por outro lado,

$$f'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{a \operatorname{sen} x + 1 - 1}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} a \frac{\operatorname{sen} x}{x} = a.$$

Para f ser diferenciável no ponto $x=0$ é preciso que se tenha

$$f_e'(0) = f_d'(0) \in \mathbb{R}.$$

Logo, f é diferenciável no ponto $x=0$ se e só se $a=0$ e $b=1$.

(ii) Seja $b=1$. Tem-se

$$f(x) = \begin{cases} a \operatorname{sen} x + 1 & \text{se } x \leq 0, \\ \\ x^2 \log x + 1 & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

f é diferenciável em $]0,+\infty[$ e tem-se $f'(x) = 2x\log x + x^2\dfrac{1}{x} = x(2\log x + 1)$, para todo o $x \in]0,+\infty[$.

Como $f'(x) < 0$, para todo o $x \in \left]0, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$, então f é estritamente decrescente em $\left]0, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$.

Como f é contínua no ponto $x=0$, então f é estritamente decrescente em $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$.

Por outro lado, f é diferenciável em $]-\infty, 0[$ e tem-se $f'(x) = a\cos x$, para todo o $x \in]-\infty,0[$.
Como $\cos x > 0$, para todo o $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$ e atendendo a f ser estritamente decrescente em $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$, para que f não tenha extremo no ponto 0 é preciso que f não seja estritamente crescente em $\left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$, e isso será verdade se e só se tivermos $a<0$. Nesse caso, com $a<0$, tem-se f estritamente decrescente em $\left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$ e como f é contínua em 0, f é estritamente decrescente em $\left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$. Como f é estritamente decrescente em $\left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right]$ e em $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$, então f é estritamente decrescente em $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$, e como tal f não tem extremo no ponto $x=0$.
Caso contrário, isto é se $a \geq 0$, teríamos $f(x) \leq f(0)$, para todo o $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{e}}\right[$, e então $f(0)$ seria um máximo local de f.

14. Mostre que se tem

$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{6},$$

para qualquer $x \in [0,1]$.

Resolução:

Seja $f(x) = e^{-x}$, com $x \in \mathbb{R}$. Considere-se a fórmula de Taylor de ordem 2 no ponto $x_0 = 0$. Tem-se

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x),$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$, com

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

e
$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}x^3,$$
e c entre x e 0.

Tem-se $f(0) = 1$.

f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = -e^{-x}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo $f'(0) = -1$.

f' é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $(f')'(x) = f''(x) = e^{-x}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo $f''(0) = 1$.

Assim, tem-se
$$P_2(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2.$$

f'' é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $(f'')'(x) = f'''(x) = -e^{-x}$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo $f''(c) = -e^{-c}$.

Como
$$|f(x) - P_2(x)| = |R_2(x)|$$
e considerando agora o intervalo $[0,1]$, tem-se
$$\left| e^{-x} - \left(1 - x + \frac{x^2}{2}\right)\right| = |R_2(x)| = \left|\frac{f'''(c)}{3!}x^3\right| = \frac{|f'''(c)|}{3!}|x|^3 = \frac{|-e^{-c}|}{3!}|x|^3 = \frac{e^{-c}}{6}|x|^3 \leq \frac{1}{6},$$
para todo o $x \in [0,1]$.

Deste modo, $\dfrac{1}{6}$ é um majorante do erro que se comete ao aproximar f pelo polinómio P_2 no intervalo $[0,1]$.

15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ três vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $f'''(x) > 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$.

(i) Mostre que f não pode ter mais de dois pontos de extremo local.

(ii) Se f tiver extremos locais nos pontos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $\alpha < \beta$, diga se $f(\alpha)$ e $f(\beta)$ são máximos ou mínimos locais de f. Justifique.

(iii) Mostre que $f(x) > f(\beta)$, se $x > \beta$.

Resolução:

(i) Sendo f diferenciável em $\mathbb{R}$, os pontos de extremos locais de f são zeros de f'. Assim, se f tivesse mais de dois pontos de extremo local, então f' teria pelo menos três zeros. Logo, pelo Teorema de Rolle, f'' teria pelo menos dois zeros. Novamente pelo Teorema de Rolle, f''' teria então pelo menos um zero, o que não pode ser pois por hipótese $f'''(x) > 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo, f não pode ter mais de dois pontos de extremo local.

(ii) Suponhamos agora que f tinha dois extremos locais nos pontos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, com $\alpha < \beta$. Logo,
$$f'(\alpha) = f'(\beta) = 0.$$

Logo, pelo Teorema de Rolle, existe $c \in]\alpha, \beta[$ tal que $f''(c) = 0$.

Por outro lado, como $f'''(x) > 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, então a função f'' é estritamente crescente em $\mathbb{R}$, e como $f''(c) = 0$, com $c \in]\alpha, \beta[$, então $f''(\alpha) < 0$ e $f''(\beta) > 0$. Logo, como

$f'(\alpha) = 0$ e $f''(\alpha) < 0$, então $f(\alpha)$ é um máximo local de f. Como $f'(\beta) = 0$ e $f''(\beta) > 0$, então $f(\beta)$ é um mínimo local de f.

(iii) Considere-se a fórmula de Taylor de f de ordem 2 no ponto $x_0 = \beta$. Tem-se

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x),$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$, com

$$P_2(x) = f(\beta) + f'(\beta)(x-\beta) + \frac{f''(\beta)}{2!}(x-\beta)^2$$

e

$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}(x-\beta)^3,$$

e c entre x e β. Logo, como $f'(\beta) = 0$, tem-se

$$f(x) = f(\beta) + \frac{f''(\beta)}{2!}(x-\beta)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-\beta)^3,$$

e como $f''(\beta) > 0$ e $f'''(c) > 0$ (pois por hipótese $f'''(x) > 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$), então, se $x > \beta$, tem-se $f(x) > f(\beta)$.

16. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função diferenciável em 0 e definida por

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{se } x \geq 0, \\ \\ \operatorname{arctg}(\alpha x) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

(i) Determine α.

(ii) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

(iii) Estude f quanto à diferenciabilidade e determine a sua função derivada f'.

(iv) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais (se existirem) de f.

(v) Estude f quanto à existência de assímptotas.

(vi) Determine o contradomínio de f.

Resolução:

(i) Como f é diferenciável em $x = 0$, então

$$f'(0) = f'_d(0) = f'_e(0) \in \mathbb{R}.$$

Como

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^{-x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = 1$$

e

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{arctg}(\alpha x)}{x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{(\mathrm{RC})}{=}} \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\alpha}{1+(\alpha x)^2}}{1} = \alpha,$$

então
$$\alpha = 1.$$

(ii)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{\text{(RC)}}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}.$$

(iii) f é diferenciável em $]0,+\infty[$ e tem-se $f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$, para todo o $x \in\,]0,+\infty[$.

Por outro lado, f é diferenciável em $]-\infty,0[$ e tem-se $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, para todo o $x \in\,]-\infty,0[$.

Por **(i)**, f é diferenciável em $x=0$ e $f'(0) = 1$. Logo, a função derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$f'(x) = \begin{cases} (1-x)e^{-x} & \text{se } x > 0, \\ 1 & \text{se } x = 0, \\ \dfrac{1}{1+x^2} & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

(iv) Como $f'(x) > 0$, para todo o $x \in\,]0,1[$, então f é estritamente crescente em $]0,1[$. Como f é contínua nos pontos $x=0$ e $x=1$, então f é estritamente crescente em $[0,1]$.

Como $f'(x) < 0$, para todo o $x \in\,]1,+\infty[$, então f é estritamente decrescente em $]1,+\infty[$. Como f é contínua no ponto $x=1$, então f é estritamente decrescente em $[1,+\infty[$.

Como $f'(x) > 0$, para todo o $x \in\,]-\infty,0[$, então f é estritamente crescente em $]-\infty,0[$. Como f é contínua no ponto $x=0$, então f é estritamente crescente em $]-\infty,0]$.

Como f é estritamente crescente em $]-\infty,1]$ e estritamente decrescente em $[1,+\infty[$, então $f(1)$ é um máximo absoluto (e portanto também local) de f.

(v) A função f não tem assímptotas verticais pois está definida em $\mathbb{R}$.

Vejamos se o gráfico de f tem assímptota $y = m_1x + p_1$ não vertical à esquerda. Tem-se

$$m_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 0$$

e

$$p_1 = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - m_1x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) \underset{\text{(i)}}{=} -\frac{\pi}{2}.$$

Logo, o gráfico de f tem como assímptota não vertical, mais concretamente horizontal, à esquerda, a recta

$$y = -\frac{\pi}{2}.$$

Vejamos se o gráfico de f tem assímptota $m_2x + p_2$ não vertical à direita. Tem-se

$$m_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{xe^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

e

$$p_2 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - m_2 x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) \underset{\text{(i)}}{=} 0.$$

Logo, o gráfico de f tem como assímptota não vertical, mais concretamente horizontal, à direita, a recta

$$y = 0.$$

(vi) Como f é contínua e estritamente crescente em $]-\infty, 1]$, então, pelo Teorema de Bolzano, tem-se

$$f(]-\infty,1]) = \left]\lim_{x\to-\infty} f(x), f(1)\right] = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{e}\right].$$

Como f é contínua e estritamente decrescente em $[1,+\infty[$, então, pelo Teorema de Bolzano, tem-se

$$f([1,+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(1)\right] = \left]0, \frac{1}{e}\right].$$

Logo, o contradomínio de f é dado por

$$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty,1]) \cup f([1,+\infty[) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{e}\right] \cup \left]0, \frac{1}{e}\right] = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{1}{e}\right].$$

17. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \log x & \text{se } x > 0, \\ \dfrac{e^x - 1}{e} & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

(i) Estude f quanto à continuidade e quanto à diferenciabilidade, e determine a sua função derivada f'.

(ii) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais (se existirem) de f.

(iii) Estude f quanto à existência de assímptotas.

(iv) Determine o contradomínio de f.

Resolução:

(i) f é diferenciável, e portanto contínua, em $]0,+\infty[$ e tem-se $f'(x) = \log x + x\dfrac{1}{x} = \log x + 1$, para todo o $x \in]0,+\infty[$.

Por outro lado, f é diferenciável, e portanto contínua, em $]-\infty,0[$ e tem-se $f'(x) = \dfrac{1}{e}e^x = e^{x-1}$, para todo o $x \in]-\infty,0[$.

Tem-se

$$f'_e(0) = \lim_{x\to0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{f(0)=0}{=} \lim_{x\to0^-} \frac{\frac{e^x-1}{e}}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{1}{e}\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{e}$$

e

$$f'_d(0) = \lim_{x\to0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{f(0)=0}{=} \lim_{x\to0^+} \frac{x\log x}{x} = \lim_{x\to0^+} \log x = -\infty.$$

Como $f'_d(0)$ não é finita, então f não é diferenciável em $x=0$.

Vejamos se f é contínua em $x=0$. Tem-se

$$f\left(0^+\right)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} x\log x \underset{(0\infty)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{\frac{1}{x}} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{(\mathrm{RC})}{=}} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

e

$$f\left(0^-\right)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{e}=0.$$

Logo, como

$$f(0)=f\left(0^+\right)=f\left(0^-\right)\in\mathbb{R},$$

então f é contínua no ponto $x=0$.

Logo, f é contínua em $\mathbb{R}$, f é diferenciável em $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, e a função derivada $f':\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é definida por

$$f'(x)=\begin{cases}\log x+1 & \text{se } x>0,\\ \\ e^{x-1} & \text{se } x<0.\end{cases}$$

(ii) Como $f'(x)>0$, para todo o $x\in\left]-\infty,0\right[$, então f é estritamente crescente em $\left]-\infty,0\right[$. Como f é contínua no ponto $x=0$, então f é estritamente crescente em $\left]-\infty,0\right]$.

Como $f'(x)<0$, para todo o $x\in\left]0,\frac{1}{e}\right[$, então f é estritamente decrescente em $\left]0,\frac{1}{e}\right[$. Como f é contínua nos pontos $x=0$ e $x=\frac{1}{e}$, então f é estritamente decrescente em $\left[0,\frac{1}{e}\right]$.

Como $f'(x)>0$, para todo o $x\in\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$, então f é estritamente crescente em $\left]\frac{1}{e},+\infty\right[$. Como f é contínua no ponto $x=1$, então f é estritamente crescente em $\left[\frac{1}{e},+\infty\right[$.

Como f é estritamente crescente em $\left]-\infty,0\right]$ e estritamente decrescente em $\left[0,\frac{1}{e}\right]$, então $f(0)$ é um máximo local de f.

Como f é estritamente decrescente em $\left[0,\frac{1}{e}\right]$ e estritamente crescente em $\left[\frac{1}{e},+\infty\right[$, então $f\left(\frac{1}{e}\right)$ é um mínimo local de f.

(iii) A função f não tem assímptotas verticais pois está definida em $\mathbb{R}$.

Vejamos se o gráfico de f tem assímptota $y=m_1x+p_1$ não vertical à esquerda. Tem-se

$$m_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^x-1}{e}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e}\frac{e^x-1}{x}=0$$

e

$$p_1=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-m_1x\right)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{e}=-\frac{1}{e}.$$

Logo, o gráfico de f tem como assímptota não vertical, mais concretamente horizontal, à esquerda, a recta

$$y = -\frac{1}{e}.$$

Vejamos se o gráfico de f tem assímptota $m_2 x + p_2$ não vertical à direita. Tem-se

$$m_2 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x \log x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty.$$

Logo, o gráfico de f não tem assímptota não vertical à direita.

(iv) Como f é contínua e estritamente crescente em $]-\infty, 0]$, então, pelo Teorema de Bolzano, tem-se

$$f(]-\infty, 0]) = \left] \lim_{x \to -\infty} f(x), f(0) \right] = \left] -\frac{1}{e}, 0 \right].$$

Como f é contínua e estritamente decrescente em $\left[0, \frac{1}{e}\right]$, então, pelo Teorema de Bolzano, tem-se

$$f\left(\left[0, \frac{1}{e}\right]\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), f(0)\right] = \left[-\frac{1}{e}, 0\right].$$

Como f é contínua e estritamente crescente em $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[$, então, pelo Teorema de Bolzano, tem-se

$$f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right), \lim_{x \to +\infty} f(x)\right[= \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[.$$

Logo, o contradomínio de f é dado por

$$f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, 0]) \cup f\left(\left[0, \frac{1}{e}\right]\right) \cup f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right[\right) = \left]-\frac{1}{e}, 0\right] \cup \left[-\frac{1}{e}, 0\right] \cup \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[= \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right[.$$

18. Sejam $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} k_1 \operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{1-x}\right) & \text{se } x < 0, \\ \\ k_2 + \operatorname{arctg} x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

Determine k_1 e k_2 de modo a que f fique contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, e mostre que, com esses valores, a função f não tem extremos locais.

Resolução:

Para que f seja contínua em $x = 0$ é preciso que se tenha $f(0) = f(0^+) = f(0^-) \in \mathbb{R}$.

Tem-se

$$f\left(0^+\right) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (k_2 + \operatorname{arctg} x) = k_2$$

e

$$f\left(0^-\right) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} k_1 \operatorname{sh}\left(\frac{x}{1-x}\right) = k_1 . \operatorname{sh} 0 = k_1 . 0 = 0.$$

Logo, $f(0) = k_2 = 0$.

Para que f seja diferenciável em $x = 0$ é preciso que se tenha $f'(0) = f'_e(0) = f'_d(0) \in \mathbb{R}$.

Tem-se

$$f'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{f(0)=0}{=} \lim_{x \to 0^-} \frac{k_1 \operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{1-x}\right)}{x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{(\mathrm{RC})}{=}} \lim_{x \to 0^-} \frac{k_1 \operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{1-x}\right) \dfrac{1}{(1-x)^2}}{1} = k_1 \operatorname{ch} 0 = k_1$$

e

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{f(0)=0}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{(\mathrm{RC})}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{\dfrac{1}{1+x^2}}{1} = 1.$$

Logo, $f'(0) = k_1 = 1$.

Assim, tem-se $k_1 = 1$ e $k_2 = 0$, e a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é então definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sh}\left(\dfrac{x}{1-x}\right) & \text{se } x < 0, \\[2ex] \operatorname{arctg} x & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

f é diferenciável, e portanto contínua, em $]0, +\infty[$ e tem-se

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

para todo o $x \in \,]0, +\infty[$.

Por outro lado, f é diferenciável, e portanto contínua, em $]-\infty, 0[$ e tem-se

$$f'(x) = \operatorname{ch}\left(\frac{x}{1-x}\right) \frac{1}{(1-x)^2},$$

para todo o $x \in \,]-\infty, 0[$.

f é diferenciável, e portanto contínua, em $x = 0$ e tem-se

$$f'(0) = 1.$$

A função derivada $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$f'(x) = \begin{cases} \operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{1-x}\right) \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{se } x < 0, \\[2ex] 1 & \text{se } x = 0, \\[2ex] \dfrac{1}{1+x^2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Como $f'(x) \neq 0$, para todo o $x \in \mathbb{R}$, então f não tem extremos locais.

19. Seja $f :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log\sqrt{1-x^2} & \text{se } x \in]-1,0], \\ \\ x^2 e^{1-x^2} & \text{se } x \in]0,+\infty[. \end{cases}$$

(i) Estude f quanto à continuidade e calcule $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

(ii) Determine o domínio de diferenciabilidade de f e a função derivada f'.

(iii) Determine os intervalos de monotonia e os extremos locais (se existirem) de f.

(iv) Determine, se existirem, as assímptotas ao gráfico de f.

(v) Determine f''.

(vi) Determine o contradomínio de f.

(vii) Determine as inflexões e o sentido das concavidades do gráfico de f.

(viii) Esboce o gráfico de f.

Resolução:

(i) f é contínua em $]-1,0[$ por ser a composta de funções contínuas.

f é contínua em $]0,+\infty[$ por ser o produto de funções contínuas.

Vejamos se f é contínua no ponto 0. Tem-se

$$f\left(0^+\right) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 e^{1-x^2} = 0.e = 0,$$

$$f\left(0^-\right) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \log\sqrt{1-x^2} = \log 1 = 0,$$

e $f(0) = 0$.

Como

$$f(0) = f\left(0^+\right) = f\left(0^-\right) \in \mathbb{R},$$

então f é contínua em $x = 0$.

Logo, f é contínua em todo o seu domínio, isto é, f é contínua em $]-1,+\infty[$.

Tem-se

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \log\sqrt{1-x^2} = -\infty$$

e

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} x^2 e^{1-x^2} \underset{(\infty 0)}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2-1}} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{(\text{RC})}{=}} \lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{e^{x^2-1}} = 0.$$

(ii) f é diferenciável em $]-1,0[$ e tem-se

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{1-x^2},$$

para todo o $x \in]-1,0[$.

Por outro lado, f é diferenciável em $]0,+\infty[$ e tem-se

$$f'(x) = 2xe^{1-x^2} + x^2e^{1-x^2}(-2x) = 2xe^{1-x^2}\left(1-x^2\right),$$

para todo o $x \in]0,+\infty[$.

Tem-se

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{f(0)=0}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{\log\sqrt{1-x^2}}{x} \underset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\overset{(\mathrm{RC})}{=}} \lim_{x\to 0^-} \frac{-\dfrac{x}{1-x^2}}{1} = 0$$

e

$$f'_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \overset{f(0)=0}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2e^{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} xe^{1-x^2} = 0.e = 0.$$

Como

$$f'_e(0) = f'_d(0) \in \mathbb{R},$$

então f é diferenciável em $x=0$ e

$$f'(0) = f'_e(0) = f'_d(0) = 0.$$

Logo, f é diferenciável em todo o seu domínio, isto é, f é diferenciável em $]-1,+\infty[$.

A função derivada $f' :]-1,+\infty[\to \mathbb{R}$ é definida por

$$f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{1-x^2} & \text{se } -1 < x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ 2xe^{1-x^2}\left(1-x^2\right) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(iii) Como $f'(x) > 0$, para todo o $x \in]-1,0[$, então f é estritamente crescente em $]-1,0[$. Como f é contínua no ponto $x=0$, então f é estritamente crescente em $]-1,0]$.

Como $f'(x) > 0$, para todo o $x \in]0,1[$, então f é estritamente crescente em $]0,1[$. Como f é contínua nos pontos $x=0$ e $x=1$, então f é estritamente crescente em $[0,1]$.

Como $f'(x) < 0$, para todo o $x \in]1,+\infty[$, então f é estritamente decrescente em $]1,+\infty[$. Como f é contínua no ponto $x=1$, então f é estritamente decrescente em $[1,+\infty[$.

Como f é estritamente crescente em $]-1,1]$ e estritamente decrescente em $[1,+\infty[$, então $f(1)$ é um máximo local de f que até é máximo absoluto.

(iv) Vejamos se o gráfico de f tem assímptotas verticais. Tem-se

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \log\sqrt{1-x^2} = -\infty.$$

Logo, $x=-1$ é uma assímptota vertical ao gráfico de f.

Vejamos se o gráfico de f tem assímptota $y = m_1x + p_1$ não vertical à direita. Tem-se

$$m_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2e^{1-x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} xe^{1-x^2} \underset{(\infty 0)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x^2-1}} \underset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\overset{(\mathrm{RC})}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2xe^{x^2-1}} = 0.$$

e

$$p_1 = \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - m_1 x \right) = \lim_{x \to +\infty} f(x) \underset{\text{(i)}}{=} 0.$$

Logo, o gráfico de f tem como assímptota não vertical, mais concretamente horizontal, à direita, a recta

$$y = 0.$$

(v) f' é diferenciável em $]-1,0[$ e tem-se

$$(f')'(x) = f''(x) = -\frac{1 - x^2 + 2x^2}{\left(1 - x^2\right)^2} = -\frac{1 + x^2}{\left(1 - x^2\right)^2},$$

para todo o $x \in]-1,0[$.

Por outro lado, f é diferenciável em $]0,+\infty[$ e tem-se

$$(f')'(x) = f''(x) = 2e^{1-x^2}\left(1 - x^2\right) - 4x^2 e^{1-x^2}\left(1 - x^2\right) - 4x^2 e^{1-x^2} = 2e^{1-x^2}\left(1 - x^2 - 2x^2\left(1 - x^2\right) - 2x^2\right) =$$

$$= 2e^{1-x^2}\left(1 - x^2 - 2x^2 + 2x^4 - 2x^2\right) = 2e^{1-x^2}\left(1 - 5x^2 + 2x^4\right),$$

para todo o $x \in]0,+\infty[$.

Tem-se

$$\lim_{x \to 0^-} f''(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(-\frac{1 + x^2}{\left(1 - x^2\right)^2} \right) = -1.$$

Logo, como $\lim\limits_{x \to 0^-} f''(x)$ é finito, tem-se

$$f''_e(0) = \lim_{x \to 0^-} f''(x) = -1.$$

Tem-se

$$\lim_{x \to 0^+} f''(x) = \lim_{x \to 0^+} 2e^{1-x^2}\left(1 - 5x^2 + 2x^4\right) = 2e.$$

Logo, como $\lim\limits_{x \to 0^+} f''(x)$ é finito, tem-se

$$f''_d(0) = \lim_{x \to 0^+} f''(x) = 2e.$$

Como

$$f''_e(0) \neq f''_d(0),$$

então f' não é diferenciável no ponto $x = 0$, isto é, não existe $f''(0)$.

A segunda derivada $f'' :]-1,+\infty[\setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é então definida por

$$f''(x) = \begin{cases} -\dfrac{1 + x^2}{\left(1 - x^2\right)^2} & \text{se } -1 < x < 0, \\[2ex] 2e^{1-x^2}\left(1 - 5x^2 + 2x^4\right) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(vi) Como f é contínua e estritamente crescente em $]-1,1]$, então, pelo Teorema de Bolzano, tem-se

$$f\left(]-1,1]\right)=\left]\lim_{x\to -1^{+}} f\left(x\right), f\left(1\right)\right]=\left]-\infty,1\right].$$

Como f é contínua e estritamente decrescente em $[1,+\infty[$, então, pelo Teorema de Bolzano, tem-se

$$f\left([1,+\infty[\right)=\left]\lim_{x\to +\infty} f\left(x\right), f\left(1\right)\right]=\left]0,1\right].$$

Logo, o contradomínio de f é dado por

$$f\left(]-1,+\infty[\right)=f\left(]-1,1]\right)\cup f\left([1,+\infty[\right)=\left]-\infty,1\right]\cup\left]0,1\right]=\left]-\infty,1\right].$$

(vii) Tem-se $f''\left(x\right)<0$, para todo o $x\in\left]-1,0\right[$. Logo, o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $]-1,0[$.

Para $x>0$, tem-se $f''\left(x\right)=0\Leftrightarrow 1-5x^2+2x^4=0\Leftrightarrow\left(x=\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}\text{ ou } x=\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}\right)$. Como

$$f'''\left(\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}\right)\neq 0 \qquad \text{e} \qquad f'''\left(\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}\right)\neq 0,$$

sendo ímpar $(n=3)$ a primeira derivada que não se anula nos pontos $\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}$ e $\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}$, então estes dois pontos são pontos de inflexão do gráfico de f.

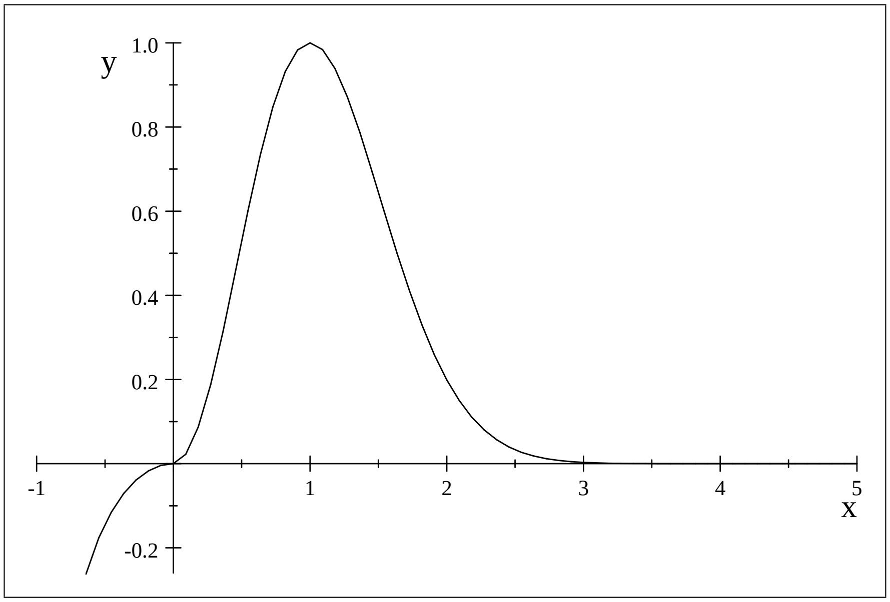
Como $f''\left(x\right)>0$, para todo o $x\in\left]0,\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}\right[\cup\left]\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2},+\infty\right[$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima em $\left]0,\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}\right[$ e em $\left]\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2},+\infty\right[$.

Como $f''\left(x\right)<0$, para todo o $x\in\left]\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2},\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}\right[$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo em $\left]\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2},\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}\right[$.

Em relação ao ponto $x=0$, como a função f toma valores negativos à esquerda de zero e positivos à direita, então o gráfico de f está abaixo do eixo das abcissas para $x<0$ e está acima desse eixo para $x>0$. Uma vez que o eixo das abcissas é a tangente ao gráfico no ponto de abcissa 0, então $x=0$ é ponto de inflexão.

(viii) $f:\left]-1,+\infty\right[\to\mathbb{R}$

$$f\left(x\right)=\begin{cases}\log\sqrt{1-x^2} & \text{se } x\in\left]-1,0\right],\\[2ex] x^2e^{1-x^2} & \text{se } x\in\left]0,+\infty\right[.\end{cases}$$



20. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{se } x < 0, \\ \\ 2e^{-x}\operatorname{ch} x - 1 + \dfrac{x}{2} = e^{-2x} + \dfrac{x}{2} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

(i) Mostre que f é contínua em $\mathbb{R}$.

(ii) Determine f'.

(iii) A função f tem extremos locais em $\mathbb{R}^+$?

(iv) Escreva o polinómio de Taylor de 2^a ordem da função f relativo ao ponto 1.

(v) Indique um majorante para o erro que se comete ao aproximar f pelo polinómio P_2 (determinado na alínea anterior) no intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Resolução:

(i) f é contínua em $\mathbb{R}^+$ e em $\mathbb{R}^-$.

Vejamos se f é contínua no ponto 0. Tem-se

$$f\left(0^+\right) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(e^{-2x} + \frac{x}{2}\right) = 1,$$

$$f\left(0^-\right) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{1-x} = 1,$$

e $f(0) = 1$.

Como

$$f(0) = f\left(0^+\right) = f\left(0^-\right) \in \mathbb{R},$$

então f é contínua em $x = 0$.

Logo, f é contínua em todo o seu domínio, isto é, f é contínua em $\mathbb{R}$.

(ii) f é diferenciável em $]-\infty, 0[$ e tem-se

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2},$$

para todo o $x \in]-\infty, 0[$.
Por outro lado, f é diferenciável em $]0, +\infty[$ e tem-se

$$f'(x) = -2e^{-2x} + \frac{1}{2},$$

para todo o $x \in]0, +\infty[$.
Tem-se

$$\lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{(1-x)^2} = 1.$$

Logo, como $\lim\limits_{x \to 0^-} f'(x)$ é finito, tem-se

$$f'_e(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 1.$$

Tem-se

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(-2e^{-2x} + \frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}.$$

Logo, como $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x)$ é finito, tem-se

$$f'_d(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = -\frac{3}{2}.$$

Como

$$f'_e(0) \neq f'_d(0),$$

então f não é diferenciável no ponto $x = 0$.
Logo, f é diferenciável em $\mathbb{R} \backslash \{0\}$.
A função derivada $f' : \mathbb{R} \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ é definida por

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2} & \text{se } x < 0, \\[2ex] -2e^{-2x} + \dfrac{1}{2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(iii) Tem-se

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2e^{-2x} + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow e^{-2x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \log \frac{1}{4} = \log 2.$$

Como $f'(x) > 0$, para todo o $x \in]-\infty, 0[$, então f é estritamente crescente em $]-\infty, 0[$. Como f é contínua no ponto $x = 0$, então f é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$.

Como $f'(x) > 0$, para todo o $x \in]\log 2, +\infty[$, então f é estritamente crescente em $]\log 2, +\infty[$. Como f é contínua no ponto $x = \log 2$, então f é estritamente crescente em $[\log 2, +\infty[$.

Como $f'(x) < 0$, para todo o $x \in]0, \log 2[$, então f é estritamente decrescente em $]0, \log 2[$. Como f é contínua nos pontos $x = 0$ e $x = \log 2$, então f é estritamente decrescente em $[0, \log 2]$.

Como f é estritamente crescente em $]-\infty, 0]$ e estritamente decrescente em $[0, \log 2]$, então $f(0)$ é um máximo local de f.

Como f é estritamente decrescente em $[0, \log 2]$ e estritamente crescente em $[\log 2, +\infty[$, então $f(\log 2)$ é um mínimo local de f.

(iv) O polinómio de Taylor de 2^a ordem $(n = 2)$ da função f relativo ao ponto $x_0 = 1$, é dado por

$$P_2(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2.$$

Tem-se

$$f(1) = e^{-2} + \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad f'(1) = -2e^{-2} + \frac{1}{2}$$

f' é diferenciável em $]0, +\infty[$ e $(f')'(x) = f''(x) = 4e^{-2x}$, para todo o $x \in]0, +\infty[$. Logo $f''(1) = 4e^{-2}$.

Assim, tem-se

$$P_2(x) = e^{-2} + \frac{1}{2} + \left(-2e^{-2} + \frac{1}{2}\right)(x-1) + 2e^{-2}(x-1)^2.$$

(v) Considere-se o intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ e a fórmula de Taylor de ordem 2 relativa a f e ao ponto $x_0 = 1$. Tem-seIndique um majorante para o erro que se comete ao aproximar f pelo polinómio P_2 (determinado na alínea anterior) no intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

Tem-se

$$f(x) = P_2(x) + R_2(x),$$

para todo o $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, com

$$R_2(x) = \frac{f'''(c)}{3!}x^3,$$

e c entre x e 1.

f'' é diferenciável em $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ e $(f'')'(x) = f'''(x) = -8e^{-2x}$, para todo o $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$. Logo $f'''(c) = -8e^{-2c}$.

Logo,

$$|f(x) - P_2(x)| = |R_2(x)| = \left|\frac{f'''(c)}{3!}(x-1)^3\right| = \frac{|f'''(c)|}{3!}|x-1|^3 = \frac{|-8e^{-2c}|}{3!}|x-1|^3 =$$

$$= \frac{4}{3}e^{-2c}|x-1|^3 \leq \frac{4}{3}\frac{1}{e}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{6e},$$

para todo o $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$,

Deste modo, $\frac{1}{6e}$ é um majorante do erro que se comete ao aproximar f pelo polinómio P_2 no intervalo $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

21. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (x-1)^4 \operatorname{sen} x$.

(i) Mostre que 1 é ponto de estacionaridade de f, isto é, $f'(1) = 0$, e determine a sua natureza (máximo, mínimo, ou ponto de inflexão).

(ii) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 0 da função sen relativa ao ponto 1, e aproveite para resolver o problema da alínea anterior de maneira alternativa.

Resolução:

(i) f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$f'(x) = 4(x-1)^3 \operatorname{sen} x + (x-1)^4 \cos x,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo $f'(1) = 0$.

f' é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$\begin{aligned}(f')'(x) &= f''(x) = 12(x-1)^2 \operatorname{sen} x + 4(x-1)^3 \cos x - (x-1)^4 \operatorname{sen} x + 4(x-1)^3 \cos x = \\ &= \left(12(x-1)^2 - (x-1)^4\right) \operatorname{sen} x + 8(x-1)^3 \cos x,\end{aligned}$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo $f''(1) = 0$.

f'' é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$(f'')'(x) = f'''(x) = \left(24(x-1) - 4(x-1)^3\right) \operatorname{sen} x + \left(12(x-1)^2 - (x-1)^4\right) \cos x +$$

$$+24(x-1)^2 \cos x - 8(x-1)^3 \operatorname{sen} x =$$

$$= \left(24(x-1) - 12(x-1)^3\right) \operatorname{sen} x + \left(36(x-1)^2 - (x-1)^4\right) \cos x,$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo $f'''(1) = 0$.

f''' é diferenciável em $\mathbb{R}$ e

$$(f''')'(x) = f^{(4)}(x) = \left(24 - 36(x-1)^2\right) \operatorname{sen} x + \left(24(x-1) - 12(x-1)^3\right) \cos x +$$

$$+ \left(72(x-1) - 4(x-1)^3\right) \cos x - \left(36(x-1)^2 - (x-1)^4\right) \operatorname{sen} x =$$

$$= \left(24 - 72(x-1)^2 + (x-1)^4\right) \operatorname{sen} x + \left(96(x-1) - 16(x-1)^3\right) \cos x$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$. Logo

$$f^{(4)}(1) = 24 > 0.$$

Como a primeira derivada que não se anula no ponto 1 é de ordem par ($n = 4$) e é positiva neste ponto, então $x = 1$ é ponto de mínimo local de f, isto é, $f(1)$ é um mínimo local de f.

(ii) A fórmula de Taylor de ordem 0 da função sen relativa ao ponto $x_0 = 1$ é dada por

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 1 + R_0(x).$$

com

$$R_0(x) = f'(c)(x-1),$$

e c entre x e 1.

Logo,

$$f(x) = (x-1)^4 \operatorname{sen} x = (x-1)^4 (\operatorname{sen} 1 + R_0(x)),$$

como

$$\lim_{x \to 1} R_0(x) = \lim_{x \to 1} f'(c)(x-1) = 0,$$

então, como $\operatorname{sen} 1 > 0$, tem-se

$$\operatorname{sen} 1 + R_0(x) > 0,$$

para todo o x numa vizinhança de 1, e assim,

$$f(x) = (x-1)^4 (\operatorname{sen} 1 + R_0(x)) \geq 0 = f(1),$$

nessa vizinhança. Logo, $f(1)$ é um mínimo local de f.