

Diagonalização unitária e diagonalização ortogonal. Raiz quadrada. (Resolução)

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}.$

(i)

$$AA^H = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} 6 & 5+5i \\ 5-5i & 11 \end{bmatrix}$$

$$A^H A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5+5i \\ 5-5i & 11 \end{bmatrix}.$$

Logo A é normal.

(ii)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}^H = A^H$$

logo A é hermitiana e em particular é normal:

$$AA^H = AA = A^H A.$$

(iii) Como A é hermitiana então é diagonalizável unitariamente (embora o recíproco não seja verdadeiro), isto é, existem uma matriz unitária U^H ($U^H U = U U^H = I$, isto é, $U^H = U^{-1}$) e uma matriz diagonal D tais que

$$D = U A U^H.$$

Note-se que: A normal $\Leftrightarrow A$ diagonalizável unitariamente.

Como

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1+i \\ 1-i & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-4),$$

os valores próprios de A são 1 e 4 e tem-se

$$\mathcal{N}(A - 1I) = L(\{(-1-i, 1)\})$$

$$\mathcal{N}(A - 4I) = L\left(\left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, 1\right)\right\}\right).$$

Note-se que os vectores de $\mathcal{N}(A - 1I)$ são ortogonais aos vectores de $\mathcal{N}(A - 4I)$. Logo, uma base ortonormada de $\mathbb{C}^2$ formada só com vectores próprios de A pode ser:

$$\left\{ \frac{1}{\|(-1-i, 1)\|} (-1-i, 1), \frac{1}{\|(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, 1)\|} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, 1\right) \right\} =$$

$$= \left\{ \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6}i, \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \right\}.$$

Logo

$$U^H = S_{\mathcal{B}_{vp} \rightarrow \mathcal{B}_c} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6}i \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

e

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6}i \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}^H}_{=U} \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6}i \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}}_{=U^H}.$$

2. Como $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & \alpha \end{bmatrix}$ não é simétrica ($(A_\alpha)^T \neq A_\alpha$) então não existe qualquer base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ formada só por vectores próprios de A_α . A matriz A_α é diagonalizável unitariamente se e só se A_α for normal, isto é, se e só se

$$(A_\alpha)^T A_\alpha = A_\alpha (A_\alpha)^T.$$

Como

$$\begin{aligned} (A_\alpha)^T A_\alpha &= A_\alpha (A_\alpha)^T \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & \alpha \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & \alpha \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & \alpha \end{bmatrix}^T \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2-2\alpha \\ 2-2\alpha & \alpha^2+4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 5 & 2\alpha-2 \\ 2\alpha-2 & \alpha^2+4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2\alpha-2 &= 2-2\alpha \Leftrightarrow \alpha = 1. \end{aligned}$$

Assim, A_α é diagonalizável unitariamente se e só se $\alpha = 1$.

3. $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Como A é simétrica então é diagonalizável ortogonalmente,

isto é, existem uma matriz ortogonal P^T ($P^T P = P P^T = I$, isto é, $P^T = P^{-1}$) e uma matriz diagonal D tais que

$$D = P A P^T.$$

Como

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & -3-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda+4)^2,$$

os valores próprios de A são 2 e -4 e tem-se

$$\mathcal{N}(A - 2I) = L\left(\left\{\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)\right\}\right)$$

$$\mathcal{N}(A + 4I) = L\left(\{(2, 0, 1), (1, 1, 0)\}\right).$$

Note-se que os vectores de $\mathcal{N}(A - 2I)$ são ortogonais aos vectores de $\mathcal{N}(A + 4I)$. Para determinar uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ formada só com vectores próprios de A basta aplicar o método de ortogonalização de Gram-Schmidt ao conjunto

$$\{(2, 0, 1), (1, 1, 0)\}.$$

Assim, relativamente ao produto interno usual em $\mathbb{R}^3$, o seguinte conjunto é uma base ortogonal de $\mathcal{N}(A + 4I)$:

$$\begin{aligned} & \left\{ (2, 0, 1), (1, 1, 0) - \underset{(2,0,1)}{\text{proj}} (1, 1, 0) \right\} = \\ & = \left\{ (2, 0, 1), (1, 1, 0) - \frac{\langle (1, 1, 0), (2, 0, 1) \rangle}{\langle (2, 0, 1), (2, 0, 1) \rangle} (2, 0, 1) \right\} = \\ & = \left\{ (2, 0, 1), (1, 1, 0) - \frac{2}{5} (2, 0, 1) \right\} = \left\{ (2, 0, 1), \left(\frac{1}{5}, 1, -\frac{2}{5}\right) \right\} \end{aligned}$$

ou seja:

$$\{(2, 0, 1), (1, 5, -2)\}.$$

Base ortonormada de $\mathbb{R}^3 = \mathcal{N}(A - 2I) \oplus \mathcal{N}(A + 4I)$ formada só por vectores próprios de A :

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{\|(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)\|} \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right), \frac{1}{\|(2, 0, 1)\|} (2, 0, 1), \frac{1}{\|(1, 5, -2)\|} (1, 5, -2) \right\} = \\ & = \left\{ \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right), \left(\frac{\sqrt{30}}{30}, \frac{\sqrt{30}}{6}, -\frac{\sqrt{30}}{15}\right) \right\}. \end{aligned}$$

Logo

$$P^T = S_{\mathcal{B}_{vp} \rightarrow \mathcal{B}_c} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{30} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{30}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{30}}{15} \end{bmatrix}$$

e

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \frac{2}{5}\sqrt{5} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{30}\sqrt{30} & \frac{1}{6}\sqrt{30} & -\frac{1}{15}\sqrt{30} \end{bmatrix}}_{=P} \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{30}}{30} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & 0 & \frac{\sqrt{30}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{5}}{5} & -\frac{\sqrt{30}}{15} \end{bmatrix}}_{=P^T}$$

$$\mathbf{4.} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}. \text{ Como}$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda - 3)(\lambda - 4),$$

os valores próprios de A são 1, 3 e 4. Como A é simétrica ($A = A^T$) e definida positiva uma vez que os valores próprios de A são todos positivos, então existe uma única raiz quadrada definida positiva B , isto é, existe uma única matriz simétrica B definida positiva tal que $A = B^2$. De facto, como A é diagonalizável ortogonalmente (por ser simétrica) tem-se

$$A = P^T D P = P^T (D')^2 P = (P^T D' P) (P^T D' P) = B B = B^2$$

com

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Note-se que sendo os 3 valores próprios distintos, os correspondentes espaços próprios são ortogonais entre si. Base ordenada ortonormada de $\mathbb{R}^3$ formada só com vectores próprios de A :

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{1}{\|(1, 2, 1)\|} (1, 2, 1), \frac{1}{\|(-1, 0, 1)\|} (-1, 0, 1), \frac{1}{\|(1, -1, 1)\|} (1, -1, 1) \right\} = \\ & = \left\{ \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Logo

$$P^T = S_{\mathcal{B}_{vp} \rightarrow \mathcal{B}_c} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

Assim, com

$$D' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$B = P^T D' P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

definida positiva e

$$B B = A.$$

No entanto, se fizermos ou

$$D' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad D' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

tem-se as 3 raízes quadradas seguintes, isto 3 matrizes B tais que $B^2 = A$:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

ou

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} & -1 & \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ou

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

De facto:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{6} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} & -1 & \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}^2 = \\ = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. a) Como

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

então $(1, 1, 1)$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 4.

b)

$$T(-1, 1, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1, 1, 0)$$

e

$$T(-1, 0, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1, 0, 1).$$

c) Por a) e b): $(1, 1, 1)$, $(-1, 1, 0)$ e $(-1, 0, 1)$ são vectores próprios de A . Como $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A - I)$, aplicando Gram-Schmidt,

$$\left\{ (-1, 1, 0), (-1, 0, 1) - \text{proj}_{(-1, 1, 0)} (-1, 0, 1) \right\} = \left\{ (-1, 1, 0), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) \right\}$$

é uma base ortogonal para $\mathcal{N}(A - I)$. Além disso, sendo A simétrica, vectores próprios associados a valores próprios distintos são ortogonais. Logo

$$\left\{ (1, 1, 1), (-1, 1, 0), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) \right\}$$

é uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A .

d) Por c)

$$\left\{ \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \right\}$$

é uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A . Logo

$$\begin{aligned} A &= P^T D P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}^T = \\ &= \left(\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}^T \right)^2 = \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}^2. \\ \text{Assim, } B &= \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \text{ é a única matriz } B \text{ definida positiva tal que } A = B^2. \end{aligned}$$