IST - LEGM e MEC - Álgebra Linear - 1º semestre 2018/2019

Diagonalização unitária e diagonalização ortogonal (Resolução)

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$.

(i)

$$AA^H = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} 6 & 5+5i \\ 5-5i & 11 \end{bmatrix}$$

$$A^H A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5+5i \\ 5-5i & 11 \end{bmatrix}.$$

Logo A é normal.

(ii)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}^H = A^H$$

logo A é hermitiana e em particular é normal:

$$AA^H = AA = A^H A.$$

(iii) Como A é hermitiana então é unitariamente diagonalizável (embora o recíproco não seja verdadeiro), isto é, existem uma matriz unitária U^H ($U^H U = UU^H = I$, isto é, $U^H = U^{-1}$) e uma matriz diagonal D tais que

$$D = UAU^H.$$

Note-se que: A normal $\Leftrightarrow$ A unitariamente diagonalizável.

Como

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1+i \\ 1-i & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4),$$

os valores próprios de A são 1 e 4 e tem-se

$$\mathcal{N}(A - 1I) = L(\{(-1-i, 1)\})$$

$$\mathcal{N}(A - 4I) = L\left(\left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, 1\right)\right\}\right).$$

Note-se que os vectores de $\mathcal{N}(A - 1I)$ são ortogonais aos vectores de $\mathcal{N}(A - 4I)$. Logo, uma base ortonormada de $\mathbb{C}^2$ formada só com vectores próprios de A pode ser:

$$\left\{ \frac{1}{\|(-1-i,1)\|}(-1-i,1), \frac{1}{\left\|\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i,1\right)\right\|}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i,1\right) \right\} =$$

$$= \left\{ \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i, \frac{\sqrt{3}}{3} \right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6}i, \frac{\sqrt{6}}{3} \right) \right\}.$$

Logo

$$U^H = S_{\mathcal{B}_{vp} \to \mathcal{B}_c} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6}i \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

e

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6}i \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}^H}_{=U} \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{\sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{6}}{6}i \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}}_{=U^H}.$$

2. Como $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & \alpha \end{bmatrix}$ não é simétrica $\left((A_\alpha)^T \neq A_\alpha \right)$ então não existe qualquer base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ formada só por vectores próprios de A_α. A matriz A_α é unitariamente diagonalizável se e só se A_α fôr normal, isto é, se e só se

$$(A_\alpha)^T A_\alpha = A_\alpha (A_\alpha)^T .$$

Como

$$(A_\alpha)^T A_\alpha = A_\alpha (A_\alpha)^T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & \alpha \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & \alpha \end{bmatrix}^T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2-2\alpha \\ 2-2\alpha & \alpha^2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2\alpha-2 \\ 2\alpha-2 & \alpha^2+4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha - 2 = 2 - 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Assim, A_α é unitariamente diagonalizável se e só se $\alpha = 1$.

3. $A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Como A é simétrica então é ortogonalmente diagonalizável, isto é, existem uma matriz ortogonal P^T $(P^T P = P P^T = I$, isto é, $P^T = P^{-1})$ e uma matriz diagonal D tais que

$$D = PAP^T.$$

Como

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & -3-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda+4)^2,$$

os valores próprios de A são 2 e -4 e tem-se

$$\mathcal{N}(A-2I)=L\left(\left\{\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)\right\}\right)$$

$$\mathcal{N}(A+4I)=L\left(\left\{(2,0,1),(1,1,0)\right\}\right).$$

Note-se que os vectores de $\mathcal{N}(A-2I)$ são ortogonais aos vectores de $\mathcal{N}(A+4I)$. Para determinar uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ formada só com vectores próprios de A basta aplicar o método de ortogonalização de Gram-Schmidt ao conjunto

$$\left\{(2,0,1),(1,1,0)\right\}.$$

Assim, relativamente ao produto interno usual em $\mathbb{R}^3$, o seguinte conjunto é uma base ortogonal de $\mathcal{N}(A+4I)$:

$$\left\{(2,0,1),(1,1,0)-\underset{(2,0,1)}{\operatorname{proj}}(1,1,0)\right\}=$$

$$=\left\{(2,0,1),(1,1,0)-\frac{\langle(1,1,0),(2,0,1)\rangle}{\langle(2,0,1),(2,0,1)\rangle}(2,0,1)\right\}=$$

$$=\left\{(2,0,1),(1,1,0)-\frac{2}{5}(2,0,1)\right\}=\left\{(2,0,1),\left(\frac{1}{5},1,-\frac{2}{5}\right)\right\}$$

ou seja:

$$\left\{(2,0,1),(1,5,-2)\right\}.$$

Base ortonormada de $\mathbb{R}^3=\mathcal{N}(A-2I)\oplus\mathcal{N}(A+4I)$ formada só por vectores próprios de A:

$$\left\{\frac{1}{\left\|\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)\right\|}\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right),\frac{1}{\|(2,0,1)\|}(2,0,1),\frac{1}{\|(1,5,-2)\|}(1,5,-2)\right\}=$$

$$=\left\{\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right),\left(\frac{2\sqrt{5}}{5},0,\frac{\sqrt{5}}{5}\right),\left(\frac{\sqrt{30}}{30},\frac{\sqrt{30}}{6},-\frac{\sqrt{30}}{15}\right)\right\}.$$

Logo

$$P^T=S_{\mathcal{B}_{vp}\to\mathcal{B}_c}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{2\sqrt{5}}{5}&\frac{\sqrt{30}}{30}\\\frac{\sqrt{6}}{6}&0&\frac{\sqrt{30}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}&\frac{\sqrt{5}}{5}&-\frac{\sqrt{30}}{15}\end{bmatrix}$$

e

$$D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&-4&0\\0&0&-4\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{1}{6}\sqrt{6}&\frac{1}{6}\sqrt{6}&\frac{1}{3}\sqrt{6}\\\frac{2}{5}\sqrt{5}&0&\frac{1}{5}\sqrt{5}\\\frac{1}{30}\sqrt{30}&\frac{1}{6}\sqrt{30}&-\frac{1}{15}\sqrt{30}\end{bmatrix}}_{=P}\begin{bmatrix}-3&-1&-2\\-1&-3&2\\-2&2&0\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{2\sqrt{5}}{5}&\frac{\sqrt{30}}{30}\\\frac{\sqrt{6}}{6}&0&\frac{\sqrt{30}}{6}\\\frac{\sqrt{6}}{3}&\frac{\sqrt{5}}{5}&-\frac{\sqrt{30}}{15}\end{bmatrix}}_{=P^T}$$

4. $A=\begin{bmatrix}3&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&3\end{bmatrix}$. Como

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=-\left(\lambda-1\right)\left(\lambda-3\right)\left(\lambda-4\right),$$

os valores próprios de A são 1, 3 e 4. Como A é simétrica $(A=A^T)$ e definida positiva uma vez que os valores próprios de A são todos positivos, então existe uma única raíz quadrada definida positiva B, isto é, existe uma única matriz simétrica B definida positiva tal que $A=B^2$. De facto, como A é ortogonalmente diagonalizável (por ser simétrica) tem-se

$$A=P^TDP=P^T\left(D'\right)^2P=\left(P^TD'P\right)\left(P^TD'P\right)=BB=B^2$$

com

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Note-se que sendo os 3 valores próprios distintos, os correspondentes espaços próprios são ortogonais entre si. Base ordenada ortonormada de $\mathbb{R}^3$ formada só com vectores próprios de A:

$$\left\{\frac{1}{\|(1,2,1)\|}\left(1,2,1\right),\frac{1}{\|(-1,0,1)\|}\left(-1,0,1\right),\frac{1}{\|(1,-1,1)\|}\left(1,-1,1\right)\right\}=$$
$$=\left\{\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{\sqrt{6}}{6}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\}.$$

Logo

$$P^T=S_{\mathcal{B}_{vp}\to\mathcal{B}_c}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}.$$

Assim, com

$$D'=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

tem-se

$$B=P^TD'P=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

definida positiva e

$$BB=A.$$

No entanto, se fizermos ou

$$D'=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\quad\text{ou}\quad D'=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

tem-se as 3 raízes quadradas seguintes, isto 3 matrizes B tais que $B^2 = A$:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

ou

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -1 & \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

ou

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{5}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

De facto:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{6} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -1 & \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \frac{5}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{5}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{6}-\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{bmatrix}^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

5. a) Como

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

então $(1, 1, 1)$ é um vector próprio de A associado ao valor próprio 4.

b)

$$T(-1, 1, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1, 1, 0)$$

e

$$T(-1, 0, 1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1, 0, 1).$$

c) Por a) e b): $(1,1,1), (-1,1,0)$ e $(-1,0,1)$ são vectores próprios de A. Como $\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{N}(A-I)$, aplicando Gram-Schmidt,

$$\left\{(-1,1,0),(-1,0,1)-\operatorname*{proj}_{(-1,1,0)}(-1,0,1)\right\}=\left\{(-1,1,0),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)\right\}$$

é uma base ortogonal para $\mathcal{N}(A-I)$. Além disso, sendo A simétrica, vectores próprios associados a valores próprios distintos são ortogonais. Logo

$$\left\{(1,1,1),(-1,1,0),\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)\right\}$$

é uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A.

d) Por c)

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}$$

é uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A. Logo

$$A=P^TDP=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{\sqrt{6}}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{\sqrt{6}}{3}\end{bmatrix}^T=$$

$$=\left(\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{\sqrt{6}}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&0&\frac{\sqrt{6}}{3}\end{bmatrix}^T\right)^2=\begin{bmatrix}\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{4}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\end{bmatrix}^2.$$

Assim, $B=\begin{bmatrix}\frac{4}{3}&\frac{1}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{4}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{1}{3}&\frac{4}{3}\end{bmatrix}$ é a única matriz B definida positiva tal que $A=B^2$.