

Aplicações (diagonalização unitária e diagonalização ortogonal, raíz quadrada, mínimos quadrados, matrizes elementares e factorização triangular)

1. Considere o produto interno usual. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}.$$

- (i) Mostre que A é normal.
- (ii) Diga, justificando, se A é hermitiana.
- (iii) Encontre uma matriz unitária U^H que diagonalize unitariamente A e indique a correspondente matriz diagonal semelhante a A .

2. Considere o produto interno usual em \mathbb{R}^2 . Seja

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & \alpha \end{bmatrix},$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$. Diga, justificando, se existe uma base ortogonal de \mathbb{R}^2 formada só por vectores próprios de A_α e determine α tal que A_α é unitariamente diagonalizável.

3. Considere o espaço linear \mathbb{R}^3 munido com o produto interno usual. Seja

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diga, justificando, se é possível encontrar uma base ortogonal para \mathbb{R}^3 formada só por vectores próprios de A . Caso seja possível, determine essa base.

4. Considere o espaço linear \mathbb{R}^3 munido com o produto interno usual. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Determine três raízes quadradas de A , isto é, determine três matrizes B tais que $A = B^2$. Diga qual é a única raiz quadrada definida positiva B .

5. Considere o espaço linear \mathbb{R}^3 munido com o produto interno usual. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- a) Mostre que $(1, 1, 1)$ é um vector próprio de A e diga qual é o valor próprio associado.

b) Sendo $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear representada matricialmente por A relativamente à base canónica ordenada $B_c^3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 (isto é, $A = M(T; B_c^3; B_c^3)$), determine $T(-1, 1, 0)$ e $T(-1, 0, 1)$.

c) Determine uma base ortogonal para \mathbb{R}^3 formada só por vectores próprios de A .

d) Determine a única matriz B definida positiva (isto é, cujos valores próprios sejam todos positivos) tal que $A = B^2$.

6. Determine a solução de mínimos quadrados de $Au = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix},$$

calculando o correspondente vector erro de mínimos quadrados.

7. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Factorize a matriz A na forma $A = LU$, obtendo uma matriz L triangular inferior só com 1's na diagonal principal e uma matriz U triangular superior.