Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 2^o semestre 2017/2018

Diagonalização unitária e diagonalização ortogonal

1. Considere o produto interno usual. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$.

   (i) Mostre que A é normal.

   (ii) Diga, justificando, se A é hermitiana.

   (iii) Encontre uma matriz unitária U^H que diagonalize unitariamente A e indique a correspondente matriz diagonal semelhante a A.

2. Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^2$. Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & \alpha \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Diga, justificando, se existe uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ formada só por vectores próprios de A_α e determine α tal que A_α é unitariamente diagonalizável.

3. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual. Seja

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Diga, justificando, se é possível encontrar uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A. Caso seja possível, determine essa base.

4. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

   Determine três raízes quadradas de A, isto é, determine três matrizes B tais que $A = B^2$. Diga qual é a única raíz quadrada definida positiva B.

5. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   a) Mostre que $(1,1,1)$ é um vector próprio de A e diga qual é o valor próprio associado.

   b) Sendo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear representada matricialmente por A relativamente à base canónica ordenada $B_c^3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ (isto é, $A = M(T; B_c^3; B_c^3)$), determine $T(-1,1,0)$ e $T(-1,0,1)$.

   c) Determine uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A.

   d) Determine a única matriz B definida positiva (isto é, cujos valores próprios sejam todos positivos) tal que $A = B^2$.