Diagonalização unitária e diagonalização ortogonal

Observação. Neste capítulo considera-se o **produto interno usual.**

Definição. Chama-se transposta conjugada de uma matriz A à matriz $\overline{A}^T$ e denota-se por A^H. Isto é,

$$A^H = \overline{A}^T.$$

Teorema. Seja A, B e C matrizes de tamanhos apropriados. Então

(i) $\left(A^H\right)^H = A$

(ii) $(\alpha A + \beta B)^H = \overline{\alpha} A^H + \overline{\beta} B^H$

(iii) $(AC)^H = C^H A^H$

Definição. (i) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. A diz-se **hermitiana** se e só se

$$A^H = A.$$

(ii) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A diz-se **simétrica** se e só se

$$A^T = A.$$

Observação. Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ então

$$A \text{ hermitiana} \Leftrightarrow A \text{ simétrica}.$$

Teorema. Se A fôr uma matriz simétrica ou hermitiana então todos os seus valores próprios são reais.

Dem. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que A é hermitiana. Seja λ um qualquer valor próprio de A e u um respectivo vector próprio associado. Tem-se

$$\langle Au, u\rangle = (Au)^H u = u^H A^H u = u^H A u = u^H \lambda u = \lambda \|u\|^2$$

e

$$\langle Au, u\rangle = (Au)^H u = (\lambda u)^H u = \overline{\lambda} u^H u = \overline{\lambda} \|u\|^2 .$$

Logo

$$\left(\lambda - \overline{\lambda}\right) \|u\|^2 = 0 \quad \text{e como} \quad u \neq \mathbf{0}$$

então

$$\lambda = \overline{\lambda},$$

isto é, λ é real.

Teorema. Se A fôr uma matriz simétrica ou hermitiana então os vectores próprios associados a valores próprios distintos são ortogonais entre si.

Dem. Sejam u e v vectores próprios associados (respectivamente) aos valores próprios λ_1 e λ_2, com $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Tem-se

$$\langle Au, v \rangle = (Au)^H v = (\lambda_1 u)^H v \underset{\lambda_1 \text{ é real}}{=} \lambda_1 \langle u, v \rangle$$

e

$$\langle Au, v \rangle = (Au)^H v = u^H A v = u^H \lambda_2 v = \lambda_2 \langle u, v \rangle .$$

Logo

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \langle u, v \rangle = 0 \quad \text{e como} \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$$

então

$$\langle u, v \rangle = 0,$$

isto é, u e v são ortogonais.

Teorema.

Os subespaços próprios de uma matriz A simétrica ou hermitiana são ortogonais entre si.

Definição. Uma matriz quadrada P diz-se **ortogonal** se e só se

$$PP^T = I, \quad \text{isto é,} \quad P^T = P^{-1}.$$

(As colunas de P^T formam uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$.)

Definição. Uma matriz quadrada P diz-se **unitária** se e só se

$$UU^H = I, \quad \text{isto é,} \quad U^H = U^{-1}.$$

(As colunas de U^H formam uma base ortonormada de $\mathbb{C}^n$.)

Observação. Se $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ então

$$A \text{ ortogonal} \Leftrightarrow A \text{ unitária.}$$

Definição. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. A diz-se **unitariamente diagonalizável** se e só se existir U^H unitária e D diagonal tais que

$$D = UAU^H,$$

isto é, se e só se existir uma base ortonormada de $\mathbb{C}^n$ formada só por vectores próprios de A, constituindo estes as colunas da matriz U^H. A matriz D será a matriz diagonal cujas colunas serão os correspondentes valores próprios.

Definição. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. A diz-se **ortogonalmente diagonalizável** se e só se existir P^T ortogonal e D diagonal tais que

$$D = PAP^T,$$

isto é, se e só se existir uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$ formada só por vectores próprios de A, constituindo estes as colunas da matriz P^T. A matriz D será a matriz diagonal cujas colunas serão os correspondentes valores próprios.

Definição. Seja V um espaço linear complexo de dimensão finita com um produto interno. Seja

$$T : V \to V$$

linear. T diz-se **unitariamente diagonalizável** se e só se existir uma base $\mathcal{B}$ ortonormada de V tal que $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ seja uma matriz diagonal. Nesse caso $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{vp}$ é uma base formada só por vectores próprios de T.

Definição. Seja V um espaço linear real de dimensão finita com um produto interno. Seja

$$T : V \to V$$

linear. T diz-se **ortogonalmente diagonalizável** se e só se existir uma base $\mathcal{B}$ ortonormada de V tal que $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ seja uma matriz diagonal. Nesse caso $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{vp}$ é uma base formada só por vectores próprios de T.

Teorema. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

A é **ortogonalmente diagonalizável** $\Rightarrow$ A é simétrica

$$D = PAP^T \qquad \Rightarrow \qquad A = A^T$$

Observação. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

A é **unitariamente diagonalizável** $\not\Rightarrow$ A é hermitiana

$$D = UAU^H \qquad \not\Rightarrow \qquad A = A^H$$

Teorema de Schur. Seja A uma matriz quadrada. Então, existe uma matriz unitária U^H tal que $UAU^H = T$ triangular superior (inferior).

Dem. A demonstração será efectuada por indução em n. O resultado é óbvio para $n = 1$. Suponhamos que a hipótese é válida para matrizes $n \times n$. Seja $A \in \mathcal{M}_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{C})$. Sejam λ_1 um valor próprio de A e w_1 um vector próprio associado λ_1 tal que $\|w_1\| = 1$. Aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt, seja $\{w_1, \ldots, w_{n+1}\}$ uma base ortonormada para $\mathbb{C}^{n+1}$. Seja W^H a matriz cuja coluna i é igual ao vector w_i, para $i = 1, \ldots, n+1$. Então a matriz W^H é unitária. Por outro lado, a primeira coluna de WAW^H é igual a WAw_1, tendo-se

$$WAw_1 = W\lambda_1 w_1 = \lambda_1 W w_1 = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

e assim

$$WAW^H = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ - & - & - & - \\ 0 & & & \\ \vdots & & M & \\ 0 & & & \end{array}\right],$$

onde M é uma matriz $n \times n$.

Pela hipótese de indução, existe uma matriz $n \times n$ unitária $(V_1)^H$ tal que $V_1 M (V_1)^H = T_1$, onde T_1 é uma matriz triangular superior. Seja

$$V^H = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & & & \\ \vdots & & (V_1)^H & \\ 0 & & & \end{array}\right].$$

Então V^H é unitária e tem-se

$$(VW)\, A\, (VW)^H = VWAW^H V^H =$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ - & - & - & - \\ 0 & & & \\ \vdots & & V_1 M (V_1)^H & \\ 0 & & & \end{array} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ - & - & - & - \\ 0 & & & \\ \vdots & & T_1 & \\ 0 & & & \end{array} \right] = T,$$

onde T é uma matriz triangular superior. Como a matriz $(VW)^H$ é unitária, pondo $U^H = (VW)^H$, tem-se

$$UAU^H = T,$$

com T triangular superior e U^H unitária.

Exemplo $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ valores próprios de A : 3 e 4

$\mathcal{N}(A - 3I) = L(\{(1,1)\})$

$\mathcal{N}(A - 4I) = L(\{(1,2)\})$

$U^H = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ Gram-Schmidt

$UAU^H = T$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}_{T}$$

Teorema de Schur. (Triangularização).

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Então existe U^H unitária tal que $UAU^H = T$ triangular superior (inferior).

Teorema. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

A é hermitiana $\Rightarrow$ A é **unitariamente diagonalizável**

$$A = A^H \qquad \Rightarrow \qquad D = UAU^H$$

Dem. existe U^H unitária tal que UAU^H é triangular. Seja $T = UAU^H$. Logo $T^H = T$ e como T é triangular então T é diagonal.

Teorema. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

A é simétrica $\Rightarrow$ A é **ortogonalmente diagonalizável**

$$A = A^T \qquad \Rightarrow \qquad D = PAP^T$$

Teorema. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Então

A é **simétrica** $\Leftrightarrow$ A é **ortogonalmente diagonalizável**

$$A = A^T \;\Leftrightarrow\; D = PAP^T$$

Observação. No teorema anterior, a matriz P^T é a matriz cujas colunas são os vectores próprios de A que formam uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$. A matriz D é a matriz diagonal cujas colunas contêm os correspondentes valores próprios.

Teorema. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Então

A é **hermitiana** $\Rightarrow$ A é **unitariamente diagonalizável**

$$A^H = A \quad \Rightarrow \quad D = UAU^H$$

Observação. No teorema anterior, a matriz U^H é a matriz cujas colunas são os vectores próprios de A que formam uma base ortonormada de $\mathbb{C}^n$. A matriz D é a matriz diagonal cujas colunas contêm os correspondentes valores próprios.

Definição. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. A diz-se **normal** se e só se

$$A^H A = AA^H.$$

(Ou $A^T A = AA^T$ no caso em que $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$)

Observação.

$\{A : A$ é simétrica$\} \subset \{A : A$ é normal$\}$

$\{A : A$ é ortogonal$\} \subset \{A : A$ é normal$\}$

$\{A : A$ é hermitiana$\} \subset \{A : A$ é normal$\}$

$\{A : A$ é unitária$\} \subset \{A : A$ é normal$\}$

Teorema. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que A é normal. Então

(i) $\|Au\| = \left\|A^H u\right\|$, $\forall u$

(ii) $A - \lambda I$ é normal

(iii) $\|(A - \lambda I)\, u\| = \left\|(A - \lambda I)^H\, u\right\| = \left\|\left(A^H - \overline{\lambda} I\right) u\right\|$

(iv) $Au = \lambda u \quad \Rightarrow \quad A^H u = \overline{\lambda} u$

Teorema. Os vectores próprios associados a valores próprios distintos, de uma matriz normal, são ortogonais

Dem. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que A é normal. Sejam λ_1, λ_2 valores próprios de A tais que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ e sejam u e v vectores próprios de A associados respectivamente a λ_1 e λ_2. Tem-se

$$Au = \lambda_1 u \quad \Rightarrow \quad A^H u = \overline{\lambda_1} u$$

$$Av = \lambda_2 v \quad \Rightarrow \quad A^H v = \overline{\lambda_2} v$$

e

$$\left\langle A^H u, v \right\rangle = \left(A^H u\right)^H v = \left(\overline{\lambda_1} u\right)^H v = \lambda_1 u^H v = \lambda_1 \langle u, v\rangle$$

$$\left\langle A^H u, v \right\rangle = \left(A^H u\right)^H v = u^H A v = \lambda_2 u^H v = \lambda_2 \langle u, v\rangle$$

Logo $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle u, v\rangle = 0$. Assim, como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, tem-se $\langle u, v\rangle = 0$.

Teorema. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Então

A é **normal** $\Leftrightarrow$ A é **unitariamente diagonalizável**

Dem. ($\Rightarrow$) Existe U^H unitária e T triangular superior tais que $T = UAU^H$. Como A é normal então

$$TT^H = T^H T,$$

isto é, T também é normal. Seja $T = \left(t_{ij}\right)$ $n\times n$. Comparando as entradas das diagonais principais de TT^H e $T^H T$ tem-se

$$\begin{array}{rcl}
|t_{11}|^2 + |t_{12}|^2 + |t_{13}|^2 + \cdots + |t_{1n}|^2 & = & |t_{11}|^2 \\
|t_{22}|^2 + |t_{23}|^2 + \cdots + |t_{2n}|^2 & = & |t_{12}|^2 + |t_{22}|^2 \\
 & & \vdots
\end{array}$$

$$|t_{nn}|^2 = |t_{1n}|^2 + |t_{2n}|^2 + |t_{3n}|^2 + \cdots + |t_{nn}|^2$$

e assim, $t_{ij} = 0$ sempre que $i \neq j$. Logo T é diagonal e A é unitariamente diagonalizável.

($\Leftarrow$) Seja A unitariamente diagonalizável. Sejam D diagonal e U^H unitária tais que

$$D = UAU^H.$$

Logo

$$A = U^H DU$$

$$AA^H = U^H \left(DD^H\right) U$$

$$A^H A = U^H \left(D^H D\right) U$$

$$DD^H = D^H D = \begin{bmatrix} |\lambda_1|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\lambda_2|^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & |\lambda_n|^2 \end{bmatrix}$$

$$AA^H = A^H A$$

e assim A é normal.

Teorema. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que A é normal com todos os valores próprios reais. Então A é simétrica.

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$$

$A^H = A \qquad A$ é hermitiana

$$AA^H = \begin{bmatrix} 6 & 5+5i \\ 5-5i & 11 \end{bmatrix} = A^H A$$

Logo A é normal. Então existem uma matriz unitária U^H ($U^H = U^{-1}$) e uma matriz diagonal D tais que

$$D = UAU^H.$$

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1+i \\ 1-i & 3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 4),$$

os valores próprios de A são 1 e 4 e tem-se

$$\mathcal{N}(A - 1I) = L(\{(-1-i, 1)\})$$

$$\mathcal{N}(A - 4I) = L\left(\left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, 1\right)\right\}\right).$$

Note-se que os vectores de $\mathcal{N}(A - 1I)$ são ortogonais aos vectores de $\mathcal{N}(A - 4I)$. Logo, uma base ortonormada de $\mathbb{C}^2$ formada só com vectores próprios de A pode ser:

$$\left\{\frac{1}{\|(-1-i,1)\|}(-1-i,1), \frac{1}{\left\|\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i,1\right)\right\|}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i,1\right)\right\} =$$

$$= \left\{\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}i, \frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{6}i, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}.$$

Logo

$$U^H = S_{\mathcal{B}_{vp}\rightarrow\mathcal{B}_c} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}i & \frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{6}}{6}i \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$$

e

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = UAU^H$$

Exemplo $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ não é simétrica logo

não é ortogonalmente diagonalizável. Mas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

então $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é normal e como tal é

unitariamente diagonalizável.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\sqrt{3} \end{bmatrix}}_{D} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}i & -\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}i & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}i & -\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}i & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}i & -\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}i \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6}+\frac{1}{2}i & -\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{1}{2}i \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}}_{U^H}$$

Definição.

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A = A^T$. Então A diz-se

(i) definida positiva sse $u^T Au > 0$, $\forall u \neq \mathbf{0}$;

(ii) definida negativa sse $u^T Au < 0$, $\forall u \neq \mathbf{0}$;

(iii) semidefinida positiva sse $u^T Au \geq 0$, $\forall u$;

(iv) semidefinida negativa sse $u^T Au \leq 0$, $\forall u$;

(v) indefinida sse existirem pontos u onde $u^T Au$ seja positiva e pontos u onde $u^T Au$ seja negativa.

Positividade do produto interno

Teorema. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $A = A^H$. Então

A é definida positiva, isto é, $u^H A u > 0$ para todo o $u \neq \mathbf{0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ todos os valores próprios de A são positivos

Dem. Sendo A hermitiana ($A = A^H$) então A é unitariamente diagonalizável, isto é, existem D diagonal e U^H unitária tais que $D = UAU^H$. Assim

$$(u^H A u > 0 \text{ para todo o } u \neq \mathbf{0}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (u^H U^H D U u > 0 \text{ para todo o } u \neq \mathbf{0}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ((Uu)^H D (Uu) > 0 \text{ para todo o } u \neq \mathbf{0}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (\sum_{i=1}^{n} |Uu_i|^2 \lambda_i > 0 \text{ para todo o } u \neq \mathbf{0}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ (\lambda_i > 0 \ \text{ para todo o } i = 1, ..., n)$$

onde $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são os valores próprios de A são positivos. Logo A é definida positiva.

Teorema.

Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $A = A^H$. Então

(i) A é **definida positiva** $\Leftrightarrow$ todos os valores próprios de A são positivos;

(ii) A é **definida negativa** $\Leftrightarrow$ todos os valores próprios de A são negativos;

(iii) A é **semidefinida positiva** $\Leftrightarrow$ todos os valores próprios de A são não negativos;

(iv) A é **semidefinida negativa** $\Leftrightarrow$ todos os valores próprios de A são não positivos;

(v) A é **indefinida** $\Leftrightarrow$ A tem pelo menos um valor próprio positivo e outro negativo.

Raíz quadrada

Definição. Chama-se raíz quadrada de uma matriz A a uma matriz B tal que $B^2 = A$ e escreve-se $B = \sqrt{A}$.

Exemplos. **(i)** Existem infinitas $\sqrt{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$ por exemplo $\dfrac{1}{t}\begin{bmatrix} \mp s & \mp r \\ \mp r & \pm s \end{bmatrix}$ com $s, r, t \in \mathbb{N}$ tais que $t^2 = s^2 + r^2$ (triplos pitagóricos)

(ii) Não existe $\sqrt{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}$

Observação. Sendo A do tipo $n \times n$ com n valores próprios distintos e não nulos, então existem pelo menos 2^n matrizes B tais que $B^2 = A$.

Teorema. **(i)** Se A fôr simétrica e definida positiva então existe uma única $\sqrt{A}$ simétrica e definida positiva.

(ii) Se A fôr simétrica e semidefinida positiva então existe uma única $\sqrt{A}$ simétrica e semidefinida positiva.

Teorema. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que A é simétrica. Então, são equivalentes:

(i) A é definida positiva ($u^T A u > 0 \ \ \forall u \neq \mathbf{0}$)

(ii) Existe uma raíz quadrada de A, isto é, existe B simétrica e definida positiva tal que

$$A = B^2$$

ou seja

$$B = \sqrt{A}$$

(iii) Existe uma matriz invertível S tal que

$$A = S^T S$$

Exemplo $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ valores próprios de A: 3 e 5

vectores próprios associados a 3: $L\left(\{(-1,1)\}\right)\setminus\{\mathbf{0}\}$

vectores próprios associados a 5: $L\left(\{(1,1)\}\right)\setminus\{\mathbf{0}\}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{5} & \frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \end{bmatrix} = \sqrt{A}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{5} & \frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{5} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Exemplo. Cálculo de $\sqrt{A}$

valores próprios de $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$: 0 e 3

base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A:

$$\left\{ \underbrace{(-1,0,1)\,, (-1,1,0) - \frac{1}{2}(-1,0,1),}_{\in \mathcal{N}(A)\setminus\{\mathbf{0}\}} \underbrace{(1,1,1)}_{\in \mathcal{N}(A-3I)\setminus\{\mathbf{0}\}} \right\} =$$

$$\{(-1,0,1)\,, (-1,2,-1)\,, (1,1,1)\}$$

base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A:

$$\left\{ \underbrace{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)}_{\in \mathcal{N}(A)\setminus\{\mathbf{0}\}}, \underbrace{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}_{\in \mathcal{N}(A-3I)\setminus\{\mathbf{0}\}} \right\}$$

$$\sqrt{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}}_{P^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}}_{\sqrt{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}}_{P}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$

Outro modo de calcular $\sqrt{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}$

base de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A:

$$\left\{ \underbrace{(-1,0,1)\,,(-1,1,0)}_{\in\mathcal{N}(A)\setminus\{\mathbf{0}\}}, \quad \underbrace{(1,1,1)}_{\in\mathcal{N}(A-3I)\setminus\{\mathbf{0}\}} \right\}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{P} =$$

$$= \left(\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}}_{\sqrt{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{P} \right)^2$$

$$\sqrt{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}}_{\sqrt{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{P}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$$