IST - Álgebra Linear - 1^o semestre 2019/2020

8^a ficha de exercícios para as aulas práticas

1. Calcule os seguintes determinantes e diga se são invertíveis as respectivas matrizes:

$$\textbf{(i)} \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} \qquad \textbf{(ii)} \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & \pi & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 9 & \sqrt{3} \end{vmatrix}$$

2. Seja

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \qquad \text{com } \alpha \in \mathbb{R}.$$

a) Diga, justificando, quais são os valores de α para os quais A_α é invertível.

b) Seja $n \in \mathbb{N}$. Calcule $\det\left((A_0)^n + (A_0)^{n+2}\right)$.

c) Considerando os valores de α para os quais A_α é invertível, calcule a entrada $(3,1)$ da matriz inversa de A_α.

3. Sejam A uma matriz invertível e

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule

$$\det\left(2B^TABA^{-1} - 3B^T\right).$$

4. Sabendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & c \\ d & e & 0 & f \\ g & h & 0 & i \\ x & y & -1 & z \end{vmatrix} = 5$$

calcule

$$\begin{vmatrix} 2i & 2h & 2g \\ f-3c & e-3b & d-3a \\ c & b & a \end{vmatrix}.$$

5. Sejam

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad D = \begin{bmatrix} 9 & -8 & -1 \\ -7 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Verifique que C e D são invertíveis e calcule:

$$\det\left(-2C^T \left(\left(-\frac{2}{3}D^3\right)^{-1}\right)\left(\left(D^T\right)^{-1} C\right)^{-1}\right)$$

6. Sem calcular o determinante, diga qual o coeficiente de x^3 na expressão

$$\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 9 & 8 & 7 & x \end{vmatrix}.$$

7. Sabendo que $533, 715$ e 871 são múltiplos de 13, justifique que

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 5 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

é também múltiplo de 13, sem calcular o determinante.

8. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ com n ímpar e tal que

$$a_{ij} + a_{ji} = 0,$$

para todos os $i, j = 1, ..., n$. Mostre que A não é invertível. Isto é, toda a matriz anti-simétrica de ordem ímpar não é invertível.

9. Considere um triângulo cujos ângulos internos tenham por âmplitudes α, β e γ e cujos lados opostos respectivos tenham por medidas a, b e c. Usando a regra de Cramer, mostre que

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$