IST - Álgebra Linear - 1^o semestre 2019/2020

7^a ficha de exercícios para as aulas práticas

1. Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T_1(x,y) = (2x+y, 0, x+2y)$. Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$ é dada pela matriz:
$$M(T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$
(i) Determine $T_2(0,1,0)$ e $T_2(0,0,1)$.

(ii) Determine uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T_1)$ de T_1 e diga se T_1 é sobrejectiva.

(iii) Determine uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T_2)$ de T_2 e diga se T_2 é injectiva.

(iv) Determine a solução geral da equação $(T_2 \circ T_1)(x,y) = (-1,1)$.

2. Considere a transformação linear $T_1 : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1$ cuja representação matricial em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{1+t, 1-t, t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$ e $\mathcal{B}_2 = \{1+t, 1+2t\}$ de $\mathcal{P}_1$, é dada pela matriz:
$$M(T_1; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ tal que
$$T_2(1) = 1 - t \qquad T_2(t) = 2 + 8t - 2t^2.$$
a) Determine a matriz $M(T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}_1)$ que representa T_2 em relação às bases ordenadas $\mathcal{B} = \{1, t\}$ de $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{B}_1 = \{1+t, 1-t, t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$.

b) Determine uma base para $\mathcal{N}(T_1)$ (núcleo de T_1) e diga se T_1 é sobrejectiva.

c) Determine $T_1(t)$ e encontre, em $\mathcal{P}_2$, a solução geral da equação $T_1(p(t)) = t$.

d) Verifique que $T_1 \circ T_2 = I$.

3. Seja $U = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}\right)$ e seja $V = L(\{1+t, t+t^2\})$ subespaço de $\mathcal{P}_2$. Considere a transformação linear $T : U \to V$ definida por:
$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = t + t^2 \quad \text{e} \quad T\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 1 + t.$$
a) Determine a matriz que representa a aplicação linear T em relação às bases
$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\} \qquad \text{e} \qquad \{1+2t+t^2, 1-t^2\}$$
de U e V respectivamente. Diga se T é um isomorfismo.

b) Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$, para todo o $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U$.

4. Considere a base ordenada $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ de $\mathcal{P}_2$ onde

$$p_1(t) = 1 + 2t + 3t^2, \quad p_2(t) = 2 + 3t, \quad p_3(t) = 1.$$

Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ definida por:

$$T(p_1(t)) = p_2(t), \qquad T(p_2(t)) = p_3(t), \qquad T(p_3(t)) = 0.$$

a) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que representa T na base $\mathcal{B}$.

b) Calcule $T^3(p(t))$, para todo o $p(t) \in \mathcal{P}_2$.

c) Determine uma base para o núcleo de T e uma base para o contradomínio de T.

d) Resolva, em $\mathcal{P}_2$, a equação linear $T(p(t)) = 3 + 3t$.

5. Seja $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ e considere as transformações lineares

$$T_2 : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^4 \quad \text{e} \quad T_3 : V \to \mathcal{P}_1$$

tais que $T_2(1 - t) = (0, 0, 0, 2)$, $T_2(1 + t) = (0, 0, 2, 0)$ e $M(T_3; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ e com $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{1 + t, 1 - t\}$ bases ordenadas de V e de $\mathcal{P}_1$ respectivamente.

a) Determine uma base para $\mathcal{I}(T_2)$.

b) Resolva em V a equação linear $T_3\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \right) = 3 - t$.

c) Determine a expressão geral de $T_2 \circ T_3$.

6. Considere a transformação linear $T_1 : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por:

$$T_1(p(t)) = \begin{bmatrix} p(-1) + p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) + p(1) \end{bmatrix}.$$

Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$ tal que

$$T_2(2 - 2t) = 6 - 2t \qquad T_2(-1 + 2t) = 6t \qquad T_2(1 + t) = 9 + 9t.$$

a) Diga se T_2 é sobrejectiva.

b) Determine a expressão geral de T_1.

c) Determine uma base para $\mathcal{I}(T_1) + \mathcal{I}(T_1)$.

d) Resolva, em $\mathcal{P}_1$, a equação linear $(T_1 \circ T_2)(p(t)) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

7. Mostre que se $\dim U < \infty$ e $T : U \to V$ é linear então $\dim U = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T)$.