IST - Álgebra Linear - 1^o semestre 2019/2020

6^a ficha de exercícios para as aulas práticas

1. Diga quais das seguintes transformações são lineares. Determine para cada transformação linear a correspondente matriz que a representa em relação às respectivas bases canónicas (ordenadas).

   (i) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y) = (x+2y, 3x-y)$.

   (ii) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y) = (1-y, 2x)$.

   (iii) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x,y,z) = (x, 2x, -x)$.

   (iv) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y,z) = (0,0)$.

   (v) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $T(x,y) = -3x$.

   (vi) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x,y,z) = (0,-1,2)$.

   (vii) $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ com $T(x) = (2x, 0, -x)$.

   (viii) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y,z) = (x^2 - y, 2y)$.

   (ix) $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x,y,z,w) = (x-y, 3w)$.

   (x) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ com $T(x,y,z) = (-z, y-2z, 2y, y+z)$.

   (xi) $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ com $T(x) = (0,0)$.

   (xii) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x,y,z) = (x+2y, 3z, x-z)$.

   (xiii) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x,y,z) = (x,y,z)$.

   (xiv) $T: \mathcal{P}_2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com $T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix}$.

   (xv) $T: \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com $T(X) = \operatorname{tr}(X) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2. Considere as transformações lineares T_1 e T_2 cujas matrizes que as representam em relação às bases canónicas (ordenadas) de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são dadas respectivamente por

$$M(T_1; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Determine as expressões gerais de

$$(T_1 \circ T_2)(x,y) \quad \text{e} \quad (T_2 \circ T_1)(x,y,z)$$

   para quaisquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

3. Considere a base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, em que $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (1,0)$ e seja

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

a transformação linear tal que

$$T(v_1) = (1,-2), \quad T(v_2) = (-3,1).$$

(i) Calcule $T(2,1)$.

(ii) Determine a expressão geral de T, isto é, determine $T(x,y)$ para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(iii) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)$ que representa T em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$.

(iv) Determine as matrizes de mudança de coordenadas $S_{\mathcal{B}_c^2 \to \mathcal{B}}$ e $S_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_c^2}$. Determine as coordenadas do vector $(2,1)$ na base $\mathcal{B}$.

(v) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ que representa T em relação à base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$. Determine as coordenadas do vector $T(2,1)$ na base $\mathcal{B}$.

(vi) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B})$ que representa T em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_c^2$ e $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$.

(vii) Determine a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2)$ que representa T em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$.

4. Considere a transformação linear

$$T_1 : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

definida por:

$$T_1(p(t)) = \begin{bmatrix} p(0) & p(1) \\ p(-1) & p(0) \end{bmatrix}.$$

Considere ainda a transformação linear

$$T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$$

tal que:

$$T_2(1,-2,0) = -1 + t^2 \qquad T_2(-1,0,1) = -t - t^2 \qquad T_2(0,1,-1) = -t^2.$$

Determine, justificando, a expressão geral da transformação linear $T_1 \circ T_2$.

5. Considere as transformações lineares $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definidas respectivamente por

$$T_1(x,y) = (x+y, x-y) \quad \text{e} \quad T_2(x,y) = (2x+y, x-2y).$$

(i) Determine as matrizes $M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)$ e $M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)$ que representam respectivamente T_1 e T_2 em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$.

(ii) Determine a matriz $A = M(T_2 \circ T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)$ que representa $T_2 \circ T_1$ em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$.

(iii) Determine, usando a alínea anterior, a expressão geral de $T_2 \circ T_1$, isto é, $(T_2 \circ T_1)(x,y)$ para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(iv) Determine, directamente a partir das expressões de T_1 e de T_2, a expressão geral de $T_2 \circ T_1$.

(v) Mostre que T_1 e T_2 são invertíveis.

(vi) Determine as expressões gerais de

$$T_1^{-1}(x,y), \quad T_2^{-1}(x,y) \quad \text{e} \quad \left(T_1^{-1} \circ T_2^{-1}\right)(x,y)$$

para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(vii) Determine a matriz $M((T_2 \circ T_1)^{-1}; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)$ que representa $(T_2 \circ T_1)^{-1}$ em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$ e verifique que é igual a A^{-1}, onde A é a matriz determinada em **(ii)**.

(viii) Verifique que $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$.

6. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e a base canónica (ordenada)

$$\mathcal{B}_c^3 = \{v_1, v_2, v_3\} \quad \text{de} \quad \mathbb{R}^3, \quad \text{com} \quad v_1 = (1,0,0), \quad v_2 = (0,1,0), \quad v_3 = (0,0,1).$$

Suponha que se tem

$$T(v_3) = 3v_1 + v_2 - 2v_3, \qquad T(v_2 + v_3) = v_1, \qquad T(v_1 + v_2 + v_3) = v_2 + v_3.$$

(i) Calcule $T(2v_1 - v_2 + 3v_3)$.

(ii) Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$ que representa T em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^3$.

(iii) Determine duas bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{u_1, u_2, u_3\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ de modo a que a matriz $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$ que represente T em relação a essas bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ seja a matriz identidade:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Sejam

$$V = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right) \quad \text{e} \quad T : \mathcal{P}_1 \to V$$

e uma transformação linear tal que

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$$

com

$$\mathcal{B}_1 = \{1 + t, 1 - t\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$ e de V respectivamente.

(i) Determine a expressão geral de T.

(ii) Verifique se T é invertível e nesse caso determine a expressão geral de T^{-1}.