IST - Álgebra Linear - 1^o semestre 2019/2020

11^a ficha de exercícios para as aulas práticas

1. Determine um produto interno em $\mathbb{R}^2$ tal que $\langle(1,0),(0,1)\rangle = 2$.

2. Considere o produto interno usual. Sejam

$$U = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+z+w=0 \quad \text{e} \quad x+y+z+w=0\right\}$$

e

$$V = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x-z=0 \quad \text{e} \quad x-w=0\right\}.$$

a) Determine, justificando, uma base ortogonal para $U^\perp$.

b) Calcule, justificando, a distância entre $(1,1,1,1)$ e U.

c) Determine $u \in U$ e $v \in V$ tais que

$$(1,0,0,0) = u + v.$$

3. Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$ e os seguintes planos:

$$U = \{(0,-1,1)\} + L\left(\{(1,0,0),(0,1,1)\}\right), \quad V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y - z = 0\}.$$

Determine, justificando, uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ que inclua um vector de $V^\perp$ e calcule, justificando, a distância entre U e V.

4. Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno para o qual a base ordenada de $\mathbb{R}^3$:

$$\{(1,0,-1),(0,1,0),(-1,0,2)\}$$

é ortonormada. Verifique que esse produto interno é definido pela aplicação $\langle,\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\langle(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = 5x_1y_1 + 3x_1y_3 + x_2y_2 + 3x_3y_1 + 2x_3y_3$$

e determine, relativamente a ele, uma base para $\left(L\left(\{(-2,0,3),(0,1,0)\}\right)\right)^\perp$.

5. Considere P_2 a aplicação $\langle,\rangle : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\langle p(t), q(t)\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Considere também o seguinte subespaço de P_2: $U = \{p(t) \in P_2 : p(0) = 0\}$.

(i) Verifique que $\langle,\rangle$ define um produto interno em P_2.

(ii) Determine uma base ortonormada para $U^\perp$.

(iii) Determine a distância entre $1+t$ e U.

6. Considere o produto interno $\langle , \rangle : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definido por
$$\langle A, B\rangle = \mathrm{tr}(AB^T).$$
Considere também o seguinte subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$:
$$U = \left\{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : A = A^T\right\}.$$
(i) Determine uma base ortonormada para U.

(ii) Determine as projecções ortogonais da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sobre U e $U^\perp$ respectivamente.

(iii) Qual é a matriz simétrica mais próxima da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$?

(iv) Determine a distância entre $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e U.

7. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^4$ munido com o produto interno usual e os seguintes subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$:

$V = L\left(\{(1,1,0,0),(1,0,1,-1)\}\right), \qquad W = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \ x - y + 2z + 3w = 0\}.$

a) Determine $u \in V$ e $v \in V^\perp$ tais que $(2,-2,1,-1) = u + v$ e calcule $d\left((1,1,1,1), V\right)$.

b) Encontre uma matriz A tal que $W^\perp = \mathcal{N}(A)$.

c) Verifique que $V \subset W$ e determine uma base para $W^\perp \cap V^\perp$.

d) Verifique se $V^\perp + W^\perp = \mathbb{R}^4$, justificando.

8. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^4$ munido com o produto interno usual e os seguintes subespaços lineares de $\mathbb{R}^4$:

$U = L\left(\{(0,1,1,1),(1,-1,1,0)\}\right), \qquad V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : 4x + 3y + 2z + w = 0\}.$

a) Determine uma base ortogonal para $V^\perp$.

b) Determine a distância entre o ponto $(1,2,3,4)$ e o subespaço $V^\perp$.

c) Determine uma base ortogonal para $\mathbb{R}^4$ que inclua os vectores $(0,1,1,1)$ e $(1,-1,1,0)$.

d) Encontre uma matriz A tal que $U = \left(\mathcal{C}(A)\right)^\perp$.

9. Seja
$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - 2y - 3z = 0\}.$$
Considere o produto interno usual.

a) Determine as equações cartesianas da recta que passa pelo ponto $u = (1,1,1)$ e é ortogonal ao plano W.

b) Determine a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $u = (1,1,1)$ e é paralelo ao plano W.

10. Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$ e a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (0, x+y, z)$. Determine os valores próprios de T e diga se T é uma projecção ortogonal.