IST - Álgebra Linear - 2^o semestre 2018/2019

Resolução da 3^a ficha de exercícios

1. (i) Seja $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$. Tem-se $U = \{(x,y,x+y) : x,y \in \mathbb{R}\}$. Uma vez que

$$(x,y,x+y) = (x,0,x) + (0,y,y) = x(1,0,1) + y(0,1,1),$$

para quaisquer $x,y \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$U = L\left(\{(1,0,1),(0,1,1)\}\right).$$

Logo, U é subespaço de $\mathbb{R}^3$. O conjunto $\{(1,0,1),(0,1,1)\}$ gera o subespaço U.

$U = \mathcal{N}(A)$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

(ii) Seja

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0 \ \text{ e } \ x-y-z=0\right\}.$$

Tem-se

$$U = \{(0,y,-y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Uma vez que

$$(0,y,-y) = y(0,1,-1),$$

para qualquer $y \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$U = L\left(\{(0,1,-1)\}\right).$$

Logo, U é subespaço de $\mathbb{R}^3$. O conjunto $\{(0,1,-1)\}$ gera o subespaço U.

$U = \mathcal{N}(A)$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$, com $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

2. Seja $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ o espaço linear de todas as matrizes do tipo 2×3 com entradas reais.

Seja $U = \left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : a = -2c \ \text{ e } \ f = 2e + d\right\}$. Tem-se

$$U = \left\{\begin{bmatrix} -2c & b & c \\ d & e & 2e+d \end{bmatrix} : b,c,d,e \in \mathbb{R}\right\}.$$

Uma vez que

$$\begin{bmatrix} -2c & b & c \\ d & e & 2e+d \end{bmatrix} = b\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + e\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

para quaisquer $b,c,d,e \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$U = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

Logo, U é subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. O conjunto

$$\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}$$

gera o subespaço U.

3. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^4$, os vectores $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (1,-1,0,0)$ e $v_3 = (0,1,2,1)$. Tem-se

$$\left[\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right] \underset{-L_1+L_4\to L_4}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-L_1+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{-L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow}$$

$$\underset{-L_2+L_4\to L_4}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c|c|c|c} 1 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]. \quad (*)$$

Logo, $(2,0,2,2), (1,1,-2,2) \in L(\{v_1, v_2, v_3\})$, com

$$\begin{aligned} (2,0,2,2) &= (1,0,0,1) + (1,-1,0,0) + (0,1,2,1) \\ (1,1,-2,2) &= 3(1,0,0,1) + (-2)(1,-1,0,0) + (-1)(0,1,2,1). \end{aligned}$$

Atendendo a (*), $(-1,4,2,2), (0,1,1,0) \notin L(\{v_1, v_2, v_3\})$.

4. Sejam

$$u = (2,1,0), \quad v = (1,-1,2) \quad \text{e} \quad w = (0,3,-4).$$

O vector (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ pertencerá a $L(\{u,v,w\})$ se existirem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(a,b,c) = \alpha(2,1,0) + \beta(1,-1,2) + \gamma(0,3,-4),$$

isto é, se o seguinte sistema (nas variáveis α, β e γ) fôr possível e determinado:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = a \\ \alpha - \beta + 3\gamma = b \\ 2\beta - 4\gamma = c. \end{cases}$$

Considerando então a matriz aumentada deste sistema, tem-se:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & 3 & b \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array}\right] \underset{-\frac{1}{2}L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & a \\ 0 & -3/2 & 3 & b - a/2 \\ 0 & 2 & -4 & c \end{array}\right] \underset{\frac{4}{3}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\frac{4}{3}L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & a \\ 0 & -3/2 & 3 & b - \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & c + \frac{4}{3}b - \frac{2}{3}a \end{array}\right].$$

Assim, o vector (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ pertencerá a $L(\{u, v, w\})$ se:

$$c + \frac{4}{3}b - \frac{2}{3}a = 0.$$

Observação: Deste modo, tem-se $L(\{u, v, w\}) \neq \mathbb{R}^3$. De facto, uma vez que

$$v = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}w$$

tem-se $L(\{u, v, w\}) = L(\{u, w\})$ e como tal $\{u, v, w\}$ não pode gerar $\mathbb{R}^3$.

5. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $\{(1, 1, 0, -1), (1, 1, 0, 1)\}$. Seja $CS = \{(1, 0, 0, 2)\} + U$.

a) Seja $(x, y, z, w) \in U$. Existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x, y, z, w) = \alpha(1, 1, 0, -1) + \beta(1, 1, 0, 1). \qquad (*)$$

Por outro lado, atendendo a

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \\ -1 & 1 & w \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ L_1+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 2 & x+w \end{array}\right]$$

para que a equação (*) tenha solução é preciso que: $y - x = 0$ e $z = 0$, ou seja $(x, y, z, w) \in \mathcal{N}(A)$, com

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Reciprocamente, se $(x, y, z, w) \in \mathcal{N}(A)$ então $(x, y, z, w) \in U$. Logo $U = \mathcal{N}(A)$.

b) Pela alínea anterior:

$$CS = \{(1, 0, 0, 2)\} + U = \{(1, 0, 0, 2)\} + \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

Tem-se então o seguinte sistema linear (com 4 variáveis) não homogéneo

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

6. a) Como

$$p(-1) = 2p(0) - p(1) \Leftrightarrow a_0 - a_1 + a_2 = 2a_0 - (a_0 + a_1 + a_2) \Leftrightarrow a_2 = 0$$

então

$$\begin{aligned} U &= \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : \; p(-1) = 2p(0) - p(1)\} = \\ &= \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_2 = 0\} = L(\{1, t\}). \end{aligned}$$

Por outro lado, atendendo a

$$\left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & a_2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & a_0+a_1 \\ 0 & 0 & a_0+a_1+a_2 \end{array}\right]$$

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in V = L(\{-1+t, 1-t^2\}) \Leftrightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 0.$$

Logo

$$V = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0 + a_1 + a_2 = 0\}.$$

Pelo que

$$\begin{aligned} U \cap V &= \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0 + a_1 + a_2 = 0 \text{ e } a_2 = 0\} = \\ &= \{-a_1 + a_1 t : a_1 \in \mathbb{R}\} = L(\{-1+t\}). \end{aligned}$$

Como

$$-1 + t = (-1) \times 1 + 1 \times t$$

então

$$U + V = L\left(\{1, t, -1+t, 1-t^2\}\right) = L\left(\{1, t, 1-t^2\}\right) = \mathcal{P}_2.$$

b) Basta ter, por exemplo, $W = L(\{1\})$, uma vez que, neste caso, $W \cap V = \{\mathbf{0}\}$ e $W + V = \mathcal{P}_2$. Logo $W \oplus V = \mathcal{P}_2$.

7. (i) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tem-se $\mathcal{C}(A) = L(\{(1,0)\})$ e $\mathcal{L}(A) = L(\{(1,-1)\})$.
Seja $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow x - y = 0,$$

o núcleo de A é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \left\{u \in \mathbb{R}^2 : Au = \mathbf{0}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\right\} = \\ &= \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,1) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,1)\}). \end{aligned}$$

(ii) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tem-se $\mathcal{C}(A) = L(\{(1,0)\})$ e $\mathcal{L}(A) = L(\{(1,2,3)\})$.
Seja $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow x + 2y + 3z = 0,$$

o núcleo de A é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \left\{u \in \mathbb{R}^3 : Au = \mathbf{0}\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\right\} = \\ &= \{(-2y-3z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-2,1,0) + z(-3,0,1) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= L(\{(-2,1,0), (-3,0,1)\}). \end{aligned}$$

(iii) Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tem-se $\mathcal{C}(A) = \{(0,0)\}$ e $\mathcal{L}(A) = \{(0,0,0)\}$.
O núcleo de A é dado por: $\mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^3$.

(iv) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(2,0,0),(1,1,0)\}\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A) = L\left(\{(2,1,1),(0,0,1)\}\right).$$

Seja $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+z=0 \\ \\ z=0 \end{cases}$$

o núcleo de A é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \left\{u \in \mathbb{R}^3 : Au = \mathbf{0}\right\} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+y+z=0 \ \text{ e } \ z=0\right\} = \\ &= \{(x,-2x,0) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,-2,0) : x \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,-2,0)\}\right). \end{aligned}$$

(v) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Tem-se $\mathcal{C}(A) = L\left(\{(1,2,2),(0,3,1)\}\right)$ e $\mathcal{L}(A) = L\left(\{(1,0),(2,3)\}\right)$,
pois

$$(2,1) = \frac{4}{3}(1,0) + \frac{1}{3}(2,3).$$

Seja $u = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \\ 2x+3y=0 \\ \\ 2x+y=0 \end{cases}$$

o núcleo de A é dado por:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^2 : Au = \mathbf{0}\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x=0 \ \text{ e } \ 2x+3y=0 \ \text{ e } \ 2x+y=0\right\} = \{(0,0)\}.$$

(vi) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(1,2,2)\}\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A) = L\left(\{(1,2)\}\right).$$

Seja $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

o núcleo de A é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \left\{u \in \mathbb{R}^2 : Au = \mathbf{0}\right\} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\right\} = \\ &= \{(-2y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(-2, 1) : y \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(-2, 1)\}\right). \end{aligned}$$

(vii) Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Tem-se $\mathcal{C}(A) = \{(0, 0, 0)\}$ e $\mathcal{L}(A) = \{(0, 0)\}$. O núcleo de A é dado por:

$$\mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^2.$$

(viii) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Tem-se

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(1, 2, 2), (0, 3, 1), (1, 0, 0)\}\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A) = L\left(\{(1, 0, 1), (2, 3, 0), (2, 1, 0)\}\right).$$

Seja $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ \\ y - 2z = 0 \\ \\ 4z = 0 \end{cases}$$

o núcleo de A é dado por:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^3 : Au = \mathbf{0}\right\} = \{(0, 0, 0)\}.$$

Observação: Como $\mathcal{N}(A) = \{(0, 0, 0)\}$ e sendo A quadrada 3×3, tem-se $\mathcal{L}(A) = \mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^3$.

8. Sejam V um espaço linear real e $\mathbf{0}$ elemento neutro de V.

(i) Suponhamos que $u + v = u + w$. Queremos ver que $v = w$. Ora,

$$\begin{aligned} v &= \mathbf{0} + v = ((-u) + u) + v = (-u) + (u + v) \underset{u+v=u+w}{=} \\ &= (-u) + (u + w) = ((-u) + u) + w = \mathbf{0} + w = w. \end{aligned}$$

Logo, $v = w$.

(ii) Queremos ver que existindo elemento neutro de V este é único. Ora, seja $w \in V$ tal que $u + w = u$, para todo o $u \in \mathbf{V}$. Então,

$$u + w = u = u + \mathbf{0} \underset{\text{por (i)}}{\Longrightarrow} w = \mathbf{0}.$$

Demonstração alternativa de (ii)
Sejam $\mathbf{0}$ e $\mathbf{0}'$ elementos neutros de V. Tem-se

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'.$$

(iii) Queremos ver que $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Ora,

$$\lambda\mathbf{0} + \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0} = \lambda\left(\mathbf{0} + \mathbf{0}\right) = \lambda\mathbf{0} + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{0} \underset{\text{por (i)}}{\Longrightarrow} \mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}.$$

Demonstração alternativa de (iii)
Como

$$\lambda\mathbf{0} = \lambda\left(\mathbf{0} + \mathbf{0}\right) = \boldsymbol{\lambda}\mathbf{0} + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{0}$$

e atendendo (por (ii)) à unicidade de elementro neutro, tem-se

$$\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

(iv) Queremos ver que $0u = \mathbf{0}$ para todo o vector $u \in \mathbf{V}$. Ora,

$$0u + \mathbf{0} = 0u = \left(0 + 0\right)u = 0u + 0u \underset{\text{por (i)}}{\Longrightarrow} \mathbf{0} = 0u.$$

Demonstração alternativa de (iv)
Como

$$0u = \left(0 + 0\right)u = 0u + 0u$$

e atendendo (por (ii)) à unicidade de elementro neutro, tem-se

$$0u = \mathbf{0}.$$

(v) Queremos ver que $-(-u) = u$ para todo o $u \in \mathbf{V}$. Ora,

$$u + (-u) = \mathbf{0} \Longrightarrow -\left(-u\right) = u.$$

(vi) Queremos ver que o simétrico $-u$ de um qualquer vector u de V é único. Ora, seja $w \in V$ tal que $u + w = \mathbf{0}$. Então,

$$u + w = \mathbf{0} = u + \left(-u\right) \underset{\text{por (i)}}{\Longrightarrow} w = -u.$$

(vii) Queremos ver que $(-1)u = -u$ para todo o $u \in \mathbf{V}$. Ora,

$$u + \left(-1\right)u = 1u + \left(-1\right)u = \left(1 + \left(-1\right)\right)u = 0u = \mathbf{0}.$$

Logo, como o simétrico é único, $(-1)u = -u$.

(viii) Queremos ver que: se $\lambda u = \mathbf{0}$, então $\lambda = 0$ ou $u = \mathbf{0}$. Suponhamos que $\lambda u = \mathbf{0}$. Se $\lambda \neq 0$, então

$$u = 1u = \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right) u = \frac{1}{\lambda}(\lambda u) = \frac{1}{\lambda}\mathbf{0} \underset{\text{por (iii)}}{=} \mathbf{0}.$$

Como $\lambda \neq 0 \Longrightarrow u = \mathbf{0}$, então $u \neq \mathbf{0} \Longrightarrow \lambda = 0$. Logo,

$$\lambda u = \mathbf{0} \Longrightarrow \lambda = 0 \vee u = \mathbf{0}$$

(ix) Queremos ver que: se $u \neq \mathbf{0}$ e $\alpha u = \beta u$, então $\alpha = \beta$. Suponhamos que $u \neq \mathbf{0}$ e $\alpha u = \beta u$. Ora, como $u \neq \mathbf{0}$ e $(\alpha - \beta) u = \mathbf{0}$, então $\alpha - \beta = 0$, atendendo a (viii). Isto é, $\alpha = \beta$.

9. Seja $y \in \mathcal{C}(A+B)$. Então existe x tal que

$$y = (A+B)x = Ax + Bx \in \mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(B).$$

Logo

$$\mathcal{C}(A+B) \subset \mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(B).$$

10. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Vejamos que $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}\left(A^T\right) = \{\mathbf{0}\}$. Seja $y \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}\left(A^T\right)$. Então existe x tal que

$$Ay = \mathbf{0} \ \text{ e } \ y = A^T x.$$

Logo

$$y^T = x^T A$$

e

$$y^T y = \left(x^T A\right) y = x^T (Ay) = x^T \mathbf{0} = 0.$$

Isto é

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = y^T y = 0$$

ou seja

$$y = (y_1, ..., y_n) = (0, ..., 0) = \mathbf{0}.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{L}(A) = \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}\left(A^T\right) = \{\mathbf{0}\}.$$

11. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = A$. Seja $u \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(A)$. Então

$$Au = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad u = Av$$

para algum v. Logo

$$\mathbf{0} = Au = A^2 v = Av$$

pelo que $v \in \mathcal{N}(A)$. Assim

$$u = Av = \mathbf{0}$$

e deste modo

$$\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(A) = \{\mathbf{0}\}.$$