IST - Álgebra Linear - 2^o semestre 2018/2019

9^a ficha de exercícios para as aulas práticas

1. Sem calcular o polinómio característico, indique um valor próprio e dois vectores próprios associados linearmente independentes para a matriz

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}.$$

2. Determine os valores próprios de uma matriz A 2×2 cujo traço seja igual a 5 e cujo determinante seja igual a 6.

3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(i) Verifique que os vectores $v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,1)$ e $v_3 = (0,0,1)$ são vectores próprios de A.

(ii) Diga, justificando, se A é invertível e se A é diagonalizável.

(iii) Determine os valores próprios de A e bases para os respectivos subespaços próprios.

(iv) Diagonalize A. Isto é, determine uma matriz P^{-1} e uma matriz diagonal D tais que $D = PAP^{-1}$.

4. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine os valores próprios de A e bases para os respectivos subespaços próprios.

(ii) Mostre que não existe nenhuma base de $\mathbb{R}^2$ constituída só por vectores próprios de A. A é diagonalizável?

5. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine o polinómio característico de A.

(ii) Determine os valores próprios de A e bases para os respectivos subespaços próprios.

(iii) Diagonalize A.

(iv) Determine A^n.

6. Considere a matriz que admite os vectores próprios

$$v_1 = (1, 2, 1), \qquad v_2 = (-1, 0, 1), \qquad v_3 = (0, 1, 0),$$

associados respectivamente aos valores próprios $1, 2$ e 3. Determine essa matriz.

7. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Diga quais dos seguintes vectores:

$$v_1 = (2, 1, 1), \quad v_2 = (0, -1, 1), \quad v_3 = (1, 0, 0), \quad v_4 = (-1, 1, 3), \quad v_5 = (0, 3, 3)$$

são vectores próprios.

(ii) Determine os valores próprios de A.

(iii) Diga, justificando, se A é invertível e se A é diagonalizável.

(iv) Determine os valores próprios de A e bases para os respectivos subespaços próprios.

8. Considere a matriz A tal que

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(i) Verifique que os vectores $v_1 = (1, -1)$ e $v_2 = (1, 1)$ são vectores próprios de A.

(ii) Diga, justificando, se A é invertível e se A é diagonalizável.

(iii) Determine A.

9. Seja A do tipo 4×4 tal que A tenha como subespaços próprios

$$L\left(\{(1, -1, -1, 1), (-2, -2, 2, 2)\}\right) \quad \text{e} \quad L\left(\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\}\right)$$

associados respectivamente a dois valores próprios distintos. Diga se A é diagonalizável e verifique se $(1, 2, 3, -6)$ é um vector próprio de A.

10. Seja A do tipo $n \times n$ tal que

$$A^2 = A.$$

Uma matriz nas condições anteriores chama-se **idempotente**.

(i) Mostre que os valores próprios de A são 0 e 1.

(ii) Mostre que A é diagonalizável.