IST - LEGM e MEC - Álgebra Linear - 1^o semestre 2018/2019

Resolução da 7^a ficha de exercícios

1. Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T_1(x, y) = (2x + y, 0, x + 2y).$$

Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ e à base canónica $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$ é dada pela matriz:

$$M(T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(i) $T_2\,(0, 1, 0) = T_2(1, 1, 0) - T_2(1, 0, 0) = (-1, 1) - (1, -1) = (-2, 2)$.
$T_2\,(0, 0, 1) = T_2(1, 1, 1) - T_2(1, 1, 0) = (1, -1) - (-1, 1) = (2, -2)$.

(ii) Tem-se

$$\begin{aligned} \mathcal{I}\,(T_1) &= \left\{T_1(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{(2x + y, 0, x + 2y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \\ &= \{x(2, 0, 1) + y(1, 0, 2) : x, y \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(2, 0, 1), (1, 0, 2)\}\right). \end{aligned}$$

Como o conjunto $\{(2, 0, 1), (1, 0, 2)\}$ gera $\mathcal{I}\,(T_1)$ e é linearmente independente, então é uma base de $\mathcal{I}\,(T_1)$.

Como $\dim \mathcal{I}(T_1) = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$ então $\mathcal{I}(T_1) \neq \mathbb{R}^3$ e assim, T_1 não é sobrejectiva.

(iii)

$$\mathcal{N}\left(M(T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}_c^2)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) =$$
$$= \{(y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}\right).$$

Como os vectores $(1, 1, 0)$ e $(-1, 0, 1)$ são as coordenadas na base $\mathcal{B}$ de vectores que geram o núcleo de T_2, tem-se

$$1(1, 1, 1) + 1(1, 1, 0) + 0(1, 0, 0) = (2, 2, 1)$$

e

$$-1(1, 1, 1) + 0(1, 1, 0) + 1(1, 0, 0) = (0, -1, -1)$$

Como o conjunto $\{(2, 2, 1), (0, -1, -1)\}$ gera $\mathcal{N}\,(T_2)$ e é linearmente independente, então é uma base de $\mathcal{N}\,(T_2)$. Como $\mathcal{N}(T_2) \neq \{\mathbf{0}\}$ então T_2 não é injectiva.

(iv) Pela definição de $M(T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}_c^2)$ tem-se $T_2\,(1, 0, 0) = (1, -1)$. Atendendo à alínea **a)**, tem-se $T_2\,(0, 1, 0) = (-2, 2)$ e $T_2\,(0, 0, 1) = (2, -2)$. Logo, a matriz $M(T_2; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2)$ que representa T_2 em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^3$ e $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$ respectivamente, é dada por

$$M(T_2; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, como $T_1(1,0) = (2,0,1)$ e $T_1(0,1) = (1,0,2)$. Logo, a matriz $M(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^3)$ que representa T_1 em relação às bases canónicas $\mathcal{B}_c^2$ e $\mathcal{B}_c^3$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ respectivamente, é dada por

$$M(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Logo, a matriz que representa $T_2 \circ T_1$ em relação à base canónica $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$ é dada por

$$M(T_2 \circ T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = M(T_2; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) M(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Logo, tem-se

$$(T_2 \circ T_1)(x,y) = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

e assim,

$$(T_2 \circ T_1)(x,y) = (-1,1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A solução geral de $(T_2 \circ T_1)(x,y) = (-1,1)$ é dada por:

$$\left(\text{Solução particular de } \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) + \left(\text{Solução geral de } \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right).$$

Como o vector $\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$ é uma solução particular de $\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e

$$\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\left\{\left(-\frac{5}{4}, 1\right)\right\}\right)$$

então, a solução geral de $(T_2 \circ T_1)(x,y) = (-1,1)$ é dada por:

$$\left(-\frac{1}{4}, 0\right) + \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}\right) = \left\{\left(-\frac{1}{4}, 0\right) + s\left(-\frac{5}{4}, 1\right) : s \in \mathbb{R}\right\}.$$

2. a) $T_2(1) = 1 - t = 0\,(1+t) + 1\,(1-t) + 0t^2$,

$$T_2(t) = 2 + 8t - 2t^2 = 5\,(1+t) - 3\,(1-t) - 2t^2,$$

logo

$$M(T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

b)

$$\mathcal{N}\left(M(T_1; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \{(-2y, y, y) : y \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(-2,1,1)\}\right).$$

Logo

$$\mathcal{N}(T_1) = L\left(\left\{(-2)(1+t) + 1(1-t) + 1t^2\right\}\right) = L\left(\left\{-1-3t+t^2\right\}\right).$$

Base para

$$\mathcal{N}(T_1) : \left\{-1-3t+t^2\right\}.$$

T_1 é sobrejectiva:

$$\dim \mathcal{I}(T_1) = \dim \mathcal{P}_2 - \dim \mathcal{N}(T_1) = 2 = \dim \mathcal{P}_1.$$

c) $T_1(t) = \frac{1}{2}\left[T_1(1+t) - T_1(1-t)\right] =$

$$= \frac{1}{2}\left[1(1+t) + 0(1+2t) - 2(1+t) + 1(1+2t)\right] = \frac{1}{2}t \Leftrightarrow T_1(2t) = t$$

(uma vez que T_1 é linear), logo a solução geral da equação $T_1(p(t)) = t$ é:

$$\{2t\} + \mathcal{N}(T_1) = \left\{2t + c\left(-1-3t+t^2\right) : c \in \mathbb{R}\right\}.$$

d) $\{1, t\}$ é uma base de $\mathcal{P}_1$. Como

$$(T_1 \circ T_2)(1) = T_1(T_2(1)) = T_1(1-t) = 2(1+t) - 1(1+2t) = 1$$

e

$$(T_1 \circ T_2)(t) = T_1(T_2(t)) = T_1\left(2+8t-2t^2\right) =$$
$$= 5T_1(1+t) - 3T_1(1-t) - 2T_1t^2 =$$
$$= 5\left[1(1+t) + 0(1+2t)\right] - 3\left[2(1+t) - (1+2t)\right] - 2\left[0(1+t) + 1(1+2t)\right] = t,$$

então $T_1 \circ T_2 = I$.

3. a) Como

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\left(t+t^2\right) + \frac{1}{2}(1+t) = \frac{1}{2} + t + \frac{1}{2}t^2 =$$
$$= \frac{1}{2} + t + \frac{1}{2}t^2 = \frac{1}{2}\left(1+2t+t^2\right) + 0\left(1-t^2\right)$$

e

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = T\left(-\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2}T\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = -\frac{1}{2}\left(t+t^2\right) + \frac{1}{2}(1+t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2 =$$
$$= 0\left(1+2t+t^2\right) + \frac{1}{2}\left(1-t^2\right)$$

a matriz que representa a aplicação linear T em relação às bases

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \qquad \text{e} \qquad B_2 = \left\{ 1 + 2t + t^2, 1 - t^2 \right\}$$

de U e V respectivamente, é dada por

$$M(T; B_1; B_2) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Como T é uma transformação linear entre espaços com igual dimensão e sendo $M(T; B_1; B_2)$ invertível, então T é um isomorfismo.

b) Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U$. Existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo $a = \alpha + \beta = d$, $\beta = c$ e $\alpha = b$, tendo-se

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a = b + c = d \right\}.$$

e, para $b, c \in \mathbb{R}$,

$$T \begin{bmatrix} b+c & b \\ c & b+c \end{bmatrix} = bT\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) + cT\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right) =$$

$$= b\left(\frac{1}{2} + t + \frac{1}{2}t^2 \right) + c\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t^2 \right) = \frac{b+c}{2} + bt + \frac{b-c}{2}t^2$$

4. a) $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ uma vez que

$$T(p_1(t)) = p_2(t), \quad T(p_2(t)) = p_3(t), \quad T(p_3(t)) = 0$$

e $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ é uma base ordenada de $\mathcal{P}_2$.

b) Atendendo a que

$$M\left(T^3; \mathcal{B}; \mathcal{B}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sendo α, β e γ as coordenadas de $p(t)$ em $\mathcal{B}$ então as coordenadas de $T^3(p(t))$ em $\mathcal{B}$ são dadas por:

$$M\left(T^3; \mathcal{B}; \mathcal{B}\right) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pelo que $T^3(p(t)) = \mathbf{0}$, para todo o $p(t) \in \mathcal{P}_2$.

c) Como $\mathcal{N}(M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})) = L(\{(0,0,1)\})$, então

$$\mathcal{N}(T) = L(\{0p_1(t) + 0p_2(t) + 1p_3(t)\}) = L(\{p_3(t)\}) = L(\{1\}).$$

O conjunto $\{1\}$ é uma base de $\mathcal{N}(T)$ pois gera $\mathcal{N}(T)$ e é linearmente independente.

Quanto ao contradomínio, como $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ gera $\mathcal{P}_2$:

$$\mathcal{I}(T) = L(\{T(p_1(t)), T(p_2(t)), T(p_3(t))\}) = L(\{p_2(t), p_3(t)\}) = L(\{2+3t, 1\}).$$

O conjunto $\{2+3t, 1\}$ é uma base de $\mathcal{I}(T)$ pois gera $\mathcal{I}(T)$ e é linearmente independente.

d) Como

$$T(p(t)) = 3 + 3t = (2+3t) + 1 = T(p_1(t)) + T(p_2(t)) =$$
$$\underset{T \text{ é linear}}{=} T(p_1(t) + p_2(t)) = T\left(3 + 5t + 3t^2\right),$$

logo $3 + 5t + 3t^2$ é uma solução particular de

$$T(p(t)) = 3 + 3t,$$

pelo que a solução geral de $T(p(t)) = 3 + 3t$ é dada por:

$$\mathcal{N}(T) + 3 + 5t + 3t^2 = \alpha + 3 + 5t + 3t^2 \quad \text{com} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

5. a) Como $\{1-t, 1+t\}$ é uma base de $\mathcal{P}_1$ e T_2 é linear, então

$$\mathcal{I}(T_2) = L(\{T_2(1-t), T_2(1+t)\}) =$$
$$= L(\{(0,0,0,2), (0,0,2,0)\}).$$

Assim e uma vez que $\{(0,0,0,2), (0,0,2,0)\}$ é linearmente independente é então uma base para $\mathcal{I}(T_2)$.

b) A matriz $M(T_3;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)$ é do tipo 2×2 e car $M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = 2$ logo T_3 é invertível e como

$$3 - t = 1(1+t) + 2(1-t)$$

tem-se

$$M\left((T_3)^{-1};\mathcal{B}_2;\mathcal{B}_1\right)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

então

$$T_3\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\right) = 3 - t \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = T^{-1}(3-t) = (-1)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo, a solução geral de

$$T_3\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\right) = 3-t \qquad \text{é:} \qquad \left\{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right\}.$$

c) Sendo $\mathcal{B}_c^4$ a base canónica de $\mathbb{R}^4$ tem-se

$$M\left(T_2 \circ T_3; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_c^4\right) = M\left(T_2; \mathcal{B}_2; \mathcal{B}_c^4\right) M\left(T_3; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$(T_2 \circ T_3)\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}\right) = a\,(T_2 \circ T_3)\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + b\,(T_2 \circ T_3)\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= a\,(0,0,2,2) + b\,(0,0,4,6) = (0,0,2a+4b,2a+6b)\,.$$

6. a) Como $\dim \mathcal{P}_1 = 2$ e o conjunto $\{2-2t, -1+2t\}$ é linearmente independente então gera $\mathcal{P}_1$. Assim

$$\{T_2\,(2-2t)\,, T_2\,(-1+2t)\} = \{6-2t, 6t\}$$

gera o contradomínio de T_2 e atendendo a que é linearmente independente, o conjunto $\{6-2t, 6t\}$ é então uma base para $\mathcal{P}_1$. Logo

$$\mathcal{I}\,(T_2) = \mathcal{P}_1,$$

isto é, T_2 é sobrejectiva.

b) $T_1(a_0 + a_1 t) = \begin{bmatrix} 2a_0 + 2a_2 & a_0 \\ a_0 & 2a_0 + 2a_2 \end{bmatrix}$, para qualquer $a_0 + a_1 t \in \mathcal{P}_1$.

$$T_1(p\,(t)) = \begin{bmatrix} p\,(-1) + p\,(1) & p\,(0) \\ p\,(0) & p\,(-1) + p\,(1) \end{bmatrix}.$$

c) Como

$$\mathcal{I}\,(T_1) + \mathcal{I}\,(T_1) = \mathcal{I}\,(T_1)$$

e o conjunto $\{1, t\}$ gera $\mathcal{P}_1$ então

$$\mathcal{I}\,(T_1) = L\left(\{T_1\,(1)\,, T_1\,(t)\}\right) =$$

$$= L\left(\left\{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right) = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

Logo $\left\{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base para o contradomínio de T_1.

d)

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = T_1(2) = T_1\left(\frac{1}{9}\left(3\left(6-2t\right)+6t\right)\right) =$$

$$= T_1\left(\frac{1}{9}\left(3T_2\left(2-2t\right)+T_2\left(-1+2t\right)\right)\right) \underset{T_2 \text{ é linear}}{=}$$

$$\underset{T_2 \text{ é linear}}{=} \left(T_1 \circ T_2\right)\left(\frac{1}{9}\left(3\left(2-2t\right)+\left(-1+2t\right)\right)\right) =$$

$$= \left(T_1 \circ T_2\right)\left(\frac{5}{9}-\frac{4}{9}t\right).$$

Logo

$$\frac{5}{9}-\frac{4}{9}t$$

é uma solução particular de

$$\left(T_1 \circ T_2\right)\left(p\left(t\right)\right) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Como

$$\mathcal{N}\left(T_1 \circ T_2\right) = \underset{\mathcal{N}(T_1)=L(\{t\})}{=} \left\{p\left(t\right) \in \mathcal{P}_1 : T_2\left(p\left(t\right)\right) \in \mathcal{N}\left(T_1\right)\right\} =$$

$$\underset{\mathcal{N}(T_1)=L(\{t\})}{=} \left\{p\left(t\right) \in \mathcal{P}_1 : T_2\left(p\left(t\right)\right) \in L\left(\{t\}\right)\right\} \underset{\mathcal{N}(T_2)=\{\mathbf{0}\}}{=} L\left(\{-1+2t\}\right),$$

logo a solução geral de

$$\left(T_1 \circ T_2\right)\left(p\left(t\right)\right) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

é:

$$\left\{\frac{5}{9}-\frac{4}{9}t\right\} + L\left(\{-1+2t\}\right).$$

Resolução alternativa: Como

$$\begin{aligned} T_2\left(1\right) &= T_2\left(\left(2-2t\right)+\left(-1+2t\right)\right) = \\ &= T_2\left(2-2t\right)+T_2\left(-1+2t\right) = 6-2t+6t = 6+4t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_2\left(t\right) &= T_2\left(\frac{1}{2}\left(2-2t\right)+\left(-1+2t\right)\right) = \\ &= \frac{1}{2}T_2\left(2-2t\right)+T_2\left(-1+2t\right) = \frac{1}{2}\left(6-2t\right)+6t = 3+5t \end{aligned}$$

então, para $p(t) = a_0 + a_1 t \in \mathcal{P}_1$ tem-se

$$T_2(a_0 + a_1 t) \underset{T_2 \text{ é linear}}{=} a_0 T_2(1) + a_1 T_2(t) =$$

$$= a_0(6 + 4t) + a_1(3 + 5t) = 6a_0 + 3a_1 + (4a_0 + 5a_1)t.$$

Por outro lado, para $p(t) = a_0 + a_1 t \in \mathcal{P}_1$ tem-se

$$T_1(a_0 + a_1 t) = \begin{bmatrix} 2a_0 & a_0 \\ a_0 & 2a_0 \end{bmatrix}.$$

Assim, a expressão geral de $T_1 \circ T_2$ é dada por

$$(T_1 \circ T_2)(a_0 + a_1 t) = T_1(T_2(a_0 + a_1 t)) =$$

$$= T_1(6a_0 + 3a_1 + (4a_0 + 5a_1)t) = \begin{bmatrix} 12a_0 + 6a_1 & 6a_0 + 3a_1 \\ 6a_0 + 3a_1 & 12a_0 + 6a_1 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$(T_1 \circ T_2)(p(t)) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 12a_0 + 6a_1 & 6a_0 + 3a_1 \\ 6a_0 + 3a_1 & 12a_0 + 6a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6a_0 + 3a_1 = 2 \Leftrightarrow a_1 = \frac{2}{3} - 2a_0$$

e assim, a solução geral de

$$(T_1 \circ T_2)(p(t)) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

é dada por:

$$\left\{a_0 + \left(\frac{2}{3} - 2a_0\right)t : a_0 \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\frac{2}{3}t + (1 - 2t)a_0 : a_0 \in \mathbb{R}\right\}.$$

De facto:

$$\left\{\frac{5}{9} - \frac{4}{9}t\right\} + L(\{-1 + 2t\}) = \left\{\frac{2}{3}t + (1 - 2t)a_0 : a_0 \in \mathbb{R}\right\}$$

uma vez que

$$\left\{\frac{5}{9} - \frac{4}{9}t\right\} + L(\{-1 + 2t\}) = \left\{\frac{5}{9} - \frac{4}{9}t + (-1 + 2t)\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\right\}$$

e considerando a mudança de variável (livre) $a_0 = -\alpha + \dfrac{5}{9}$ tem-se

$$\left\{\frac{2}{3}t + (1 - 2t)a_0 : a_0 \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{2}{3}t + (1 - 2t)\left(-\alpha + \frac{5}{9}\right) : \alpha \in \mathbb{R}\right\} =$$

$$= \left\{\frac{5}{9} - \frac{4}{9}t + (-1 + 2t)\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\right\}.$$