IST - LEGM e MEC - Álgebra Linear - 1^o semestre 2018/2019

Resolução da 6^a ficha de exercícios

1. (i) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y) = (x + 2y, 3x - y)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0) = (1, 3)$ e $T(0, 1) = (2, -1)$.

(ii) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y) = (1 - y, 2x)$. T não é linear pois $T(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$.

(iii) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (x, 2x, -x)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0) = (1, 2, -1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$.

(iv) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y, z) = (0, 0)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0) = T(0, 1, 0) = T(0, 0, 1) = (0, 0)$.

(v) Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ com $T(x, y) = -3x$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0) = -3$ e $T(0, 1) = 0$. Note que $\mathcal{B}_c = \{1\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}$.

(vi) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (0, -1, 2)$. T não é linear pois $T(0, 0, 0) = (0, -1, 2) \neq (0, 0, 0)$.

(vii) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ com $T(x) = (2x, 0, -x)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1) = (2, 0, -1)$.

(viii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y, z) = (x^2 - y, 2y)$. T não é linear, pois por exemplo:

$$T((1, 0, 0) + (1, 0, 0)) = T(2, 0, 0) = (4, 0) \neq (2, 0) = T(1, 0, 0) + T(1, 0, 0).$$

(ix) Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ com $T(x, y, z, w) = (x - y, 3w)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^4; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0, 0) = (1, 0)$, $T(0, 1, 0, 0) = (-1, 0)$, $T(0, 0, 1, 0) = (0, 0)$ e $T(0, 0, 0, 1) = (0, 3)$.

(x) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ com $T(x, y, z) = (-z, y - 2z, 2y, y + z)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1, 2, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (-1, -2, 0, 1)$.

(xi) Seja $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ com $T(x) = (0, 0)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1) = (0, 0)$.

(xii) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (x + 2y, 3z, x - z)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$, $T(0, 1, 0) = (2, 0, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 3, -1)$.

(xiii) Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (x, y, z)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$.

(xiv) Seja $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com $T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix}$.

T é linear uma vez que, para todos os $p(t), p_1(t), p_2(t) \in \mathcal{P}_2$, para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$T(p_1(t) + p_2(t)) = T((p_1 + p_2)(t)) = \begin{bmatrix} (p_1 + p_2)(1) & (p_1 + p_2)(0) \\ (p_1 + p_2)(0) & (p_1 + p_2)(-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} p_1(1) + p_2(1) & p_1(0) + p_2(0) \\ p_1(0) + p_2(0) & p_1(-1) + p_2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(1) & p_1(0) \\ p_1(0) & p_1(-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_2(1) & p_2(0) \\ p_2(0) & p_2(-1) \end{bmatrix} =$$
$$= T(p_1(t)) + T(p_2(t)),$$

$$\begin{aligned} T(\lambda p(t)) &= T((\lambda p)(t)) = \begin{bmatrix} (\lambda p)(1) & (\lambda p)(0) \\ (\lambda p)(0) & (\lambda p)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda p(1) & \lambda p(0) \\ \lambda p(0) & \lambda p(-1) \end{bmatrix} = \\ &= \lambda \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix} = \lambda T(p(t)). \end{aligned}$$

Sendo $\mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2\}$ a base canónica de $\mathcal{P}_2$ e

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad T(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad T(t^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(xv) Seja $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ com $T(X) = \operatorname{tr}(X) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Resolva ainda a equação linear $T(X) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. Seja

$$\mathcal{B}_c^{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Logo

$$M(T; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}_c^{2\times 2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Considere as transformações lineares T_1 e T_2 cujas matrizes que as representam em relação às bases canónicas (ordenadas) de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são dadas respectivamente por

$$M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com

$$T_1(x,y,z) = M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (2x+z, x+y).$$

Tem-se $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com

$$T_2(x,y) = M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (y, y, x+y).$$

Logo, tem-se $T_1 \circ T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linear com

$$\begin{aligned} (T_1 \circ T_2)(x,y) &= M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x+3y, 2y) \end{aligned}$$

e $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear com

$$(T_2 \circ T_1)(x,y,z) = M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^3)M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^2)\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x+y, x+y, 3x+y+z).$$

Resolução alternativa: Tendo-se $T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $T_1(x,y,z) = (2x+z, x+y)$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ com $T_2(x,y) = (y,y,x+y)$, então $T_1 \circ T_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é linear com

$$(T_1 \circ T_2)(x,y) = T_1(T_2(x,y)) = T_1(y,y,x+y) = (x+3y, 2y)$$

e $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é linear com

$$(T_2 \circ T_1)(x,y,z) = T_2(T_1(x,y,z)) = T_2(2x+z, x+y) = (x+y, x+y, 3x+y+z).$$

3. Considere a base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, em que $v_1 = (1,1)$ e $v_2 = (1,0)$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que

$$T(v_1) = (1,-2), \quad T(v_2) = (-3,1).$$

(i) Tem-se $T(2,1) = T\left((1,1)+(1,0)\right) \underbrace{=}_{T \text{ é linear}} T(1,1)+T(1,0) = (1,-2)+(-3,1) = (-2,-1)$.

(ii) Seja $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Tem-se

$$(x,y) = y(1,1)+(x-y)(1,0).$$

Logo,

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T\left(y(1,1)+(x-y)(1,0)\right) \underbrace{=}_{T \text{ é linear}} yT(1,1)+(x-y)T(1,0) = \\ &= y(1,-2)+(x-y)(-3,1) = (-3x+4y, x-3y). \end{aligned}$$

(iii) Tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

uma vez que, pela alínea **(ii)**, $T(1,0) = (-3,1)$ e $T(0,1) = (4,-3)$.

Observação: Poderíamos ter calculado $T(1,0)$ e $T(0,1)$ sem recorrer à alinea **(ii)**, uma vez que

$$(1,0) = 0(1,1)+(1,0) \;\text{ e }\; (0,1) = (1,1)-(1,0).$$

Logo, sendo T linear, tem-se (usando só o enunciado)

$$T(1,0) = (-3,1) \;\text{ e }\; T(0,1) = T(1,1)-T(1,0) = (1,-2)-(-3,1) = (4,-3).$$

(iv) Tem-se

$$S_{\mathcal{B}_c^2 \to \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

uma vez que

$$(1,0) = 0(1,1)+(1,0) \;\text{ e }\; (0,1) = (1,1)-(1,0).$$

Tem-se

$$S_{\mathcal{B} \to \mathcal{B}_c^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

uma vez que

$$(1,1) = (1,0)+(0,1) \;\text{ e }\; (1,0) = (1,0)+0(0,1).$$

As coordenadas do vector $(2,1)$ na base $\mathcal{B}$ são dadas por:

$$S_{\mathcal{B}_c^2 \to \mathcal{B}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observação 1: Na verdade poderíamos ter determinado as coordenadas do vector $(2,1)$ na base $\mathcal{B}$ usando a definição de coordenadas de um vector numa base:

$$(2,1) = (1,1)+(1,0).$$

Logo, as coordenadas do vector $(2,1)$ na base $\mathcal{B}$ são precisamente 1 e 1.

Observação 2: Tem-se

$$S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c^2} = \left(S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}}\right)^{-1} \quad \text{e} \quad S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} = \left(S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c^2}\right)^{-1}.$$

(v) Determinemos a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ usando só a definição de matriz que representa uma transformação linear em relação a uma base ordenada $\mathcal{B}$ no espaço de partida e no espaço de chegada. Tem-se

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1,1) = (1,-2) = -2(1,1) + 3(1,0) \;\text{ e }\; T(1,0) = (-3,1) = (1,1) - 4(1,0).$$

Determinemos agora as coordenadas do vector $T(2,1)$ na base $\mathcal{B}$ sem usar as alíneas anteriores. Tem-se

$$\begin{aligned} T(2,1) &= T\left((1,1)+(1,0)\right) \underbrace{=}_{T \text{ é linear}} T(1,1) + T(1,0) = \\ &= (1,-2) + (-3,1) = (-2,-1) = -(1,1) - (1,0). \end{aligned}$$

Logo, as coordenadas do vector $T(2,1)$ na base $\mathcal{B}$ são -1 e -1.

Resolução alternativa: Determinemos a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ e as coordenadas do vector $T(2,1)$ na base $\mathcal{B}$ usando as alíneas anteriores. Tem-se

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_c^2) & \xrightarrow[T]{M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_c^2) \\ S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} \\ (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) & \xrightarrow[M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})]{T} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \end{array}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) \left(S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}}\right)^{-1} = S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c^2} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Além disso tem-se

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c}\text{coordenadas de } (2,1) \\ \text{na base } \mathcal{B}_c^2\end{array} & \xrightarrow[T]{M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)} & \begin{array}{c}\text{coordenadas de } T(2,1) \\ \text{na base } \mathcal{B}_c^2\end{array} \\ S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}} \\ \begin{array}{c}\text{coordenadas de } (2,1) \\ \text{na base } \mathcal{B}\end{array} & \xrightarrow[M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})]{T} & \begin{array}{c}\text{coordenadas de } T(2,1) \\ \text{na base } \mathcal{B}.\end{array} \end{array}$$

Logo, sendo 2 e 1 as coordenadas do vector $(2,1)$ na base $\mathcal{B}_c^2$ então as coordenadas do vector $T(2,1)$ na base $\mathcal{B}$ são dadas por

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\3&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3\\-4&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}.$$

(vi) Determinemos a matriz $M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B})$ usando só a definição de matriz que representa uma transformação linear em relação às bases ordenadas no espaço de partida e no espaço de chegada. Tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B})=\begin{bmatrix}1&-3\\-4&7\end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1,0)=(-3,1)=(1,1)-4(1,0)$$

e

$$\begin{aligned}T(0,1)&=T\left((1,1)-(1,0)\right)=T(1,1)-T(1,0)=\\&=(1,-2)-(-3,1)=(4,-3)=-3(1,1)+7(1,0).\end{aligned}$$

Resolução alternativa: Tendo em conta o diagrama

$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_c^2) & \underset{T}{\overset{M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_c^2)\\ S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}}\downarrow I & & I\downarrow S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}}\\ (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}) & \underset{M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})}{\overset{T}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^2,\mathcal{B})\end{array}$$

tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B})=M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})S_{\mathcal{B}_c^2\to\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}-2&1\\3&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3\\-4&7\end{bmatrix}.$$

(vii) Determinemos a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2)$ usando só a definição de matriz que representa uma transformação linear em relação às bases ordenadas no espaço de partida e no espaço de chegada. Tem-se

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix}1&-3\\-2&1\end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1,1)=(1,-2)=(1,0)-2(0,1)$$

e

$$T(1,0)=(-3,1)=-3(1,0)+(0,1).$$

Resolução alternativa: Tendo em conta o diagrama

$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}) & \underset{T}{\overset{M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^2,\mathcal{B})\\ S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c^2}\downarrow I & & I\downarrow S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c^2}\\ (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_c^2) & \underset{M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)}{\overset{T}{\longrightarrow}} & (\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_c^2)\end{array}$$

tem-se

$$M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}_c^2)=M(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c^2}=\begin{bmatrix}-3&4\\1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-3\\-2&1\end{bmatrix}.$$

4. Tem-se

$$\begin{aligned}1+t+t^2 &= (-1)\left(-1+t^2\right)+(-1)\left(-t-t^2\right)+(-1)\left(-t^2\right)=\\&=(-1)\,T_2\,(1,-2,0)+(-1)\,T_2\,(-1,0,1)+(-1)\,T_2\,(0,1,-1)=\\&=T_2\,((-1)\,(1,-2,0)+(-1)\,(-1,0,1)+(-1)\,(0,1,-1))=T_2\,(0,1,0)\,.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_2\,(1,0,0) &= T_2\,(-\,(1,-2,0)-2\,(-1,0,1)-2\,(0,1,-1))=\\&=-T_2\,(1,-2,0)-2T_2\,(-1,0,1)-2T_2\,(0,1,-1)=\\&=-\left(-1+t^2\right)-2\left(-t-t^2\right)-2\left(-t^2\right)=1+2t+3t^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T_2\,(0,0,1) &= T_2\,(-\,(1,-2,0)-(-1,0,1)-2\,(0,1,-1))=\\&=-T_2\,(1,-2,0)-T_2\,(-1,0,1)-2T_2\,(0,1,-1)=\\&=-\left(-1+t^2\right)-\left(-t-t^2\right)-2\left(-t^2\right)=1+t+2t^2\end{aligned}$$

logo, a matriz da transformação linear T_2 relativamente às bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{P}_2$ respectivamente é dada por: $\begin{bmatrix}1&1&1\\2&1&1\\3&1&2\end{bmatrix}$ e assim, tem-se

$$\begin{aligned}T_2\,(x,y,z) &= \left(1+2t+3t^2\right)x+\left(1+t+t^2\right)y+\left(1+t+2t^2\right)z=\\&=x+y+z+(2x+y+z)\,t+(3x+y+2z)\,t^2.\end{aligned}$$

Logo a expressão geral de $T_1\circ T_2$ é dada por:

$$\begin{aligned}(T_1\circ T_2)\,(x,y,z) &= T_1\,(T_2\,(x,y,z))=\\&=T_1\left(x+y+z+(2x+y+z)\,t+(3x+y+2z)\,t^2\right)=\\&=\begin{bmatrix}x+y+z&6x+3y+4z\\2x+y+2z&x+y+z\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

5. 25. Considere as transformações lineares $T_1,T_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definidas respectivamente por

$$T_1(x,y)=(x+y,x-y)\quad\text{e}\quad T_2(x,y)=(2x+y,x-2y).$$

(i) Tem-se

$$M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

e

$$M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

uma vez que $T_1(1,0)=(1,1)$, $T_1(0,1)=(1,-1)$, $T_2(1,0)=(2,1)$ e $T_2(0,1)=(1,-2)$.

(ii) A matriz $M(T_2\circ T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)$ que representa $T_2\circ T_1$ em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$, é dada por

$$\begin{aligned} M(T_2\circ T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) &= M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)= \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(iii) Tem-se, para qualquer $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} (T_2\circ T_1)(x,y) &= M(T_2\circ T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}= \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=(3x+y,-x+3y). \end{aligned}$$

(iv) Tem-se, para qualquer $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} T_1(x,y) &= M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}= \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=(x+y,x-y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_2(x,y) &= M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}= \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=(2x+y,x-2y). \end{aligned}$$

Logo,

$$(T_2\circ T_1)(x,y)=T_2\left(T_1(x,y)\right)=T_2(x+y,x-y)=$$
$$=(2x+2y+x-y,x+y-2x+2y)=(3x+y,-x+3y).$$

(v) Tem-se

$$\mathcal{N}(T_1)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:T(x,y)=(0,0)\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x+y,x-y)=(0,0)\right\}=\{(0,0)\}$$

e

$$\mathcal{N}(T_2)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:T(x,y)=(0,0)\right\}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(2x+y,x-2y)=(0,0)\right\}=\{(0,0)\}.$$

Logo, T_1 e T_2 são injectivas e como tal são invertíveis.

(vi) Tem-se então

$$\left(M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1}=M(T_1^{-1};\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2) \ \text{ e } \ \left(M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1}=M(T_2^{-1};\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)$$

Determinemos $(M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2))^{-1}$ e $(M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2))^{-1}$.

$$\begin{aligned}\left[M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\mid I\right] &= \left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\1&-1&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}1&1&1&0\\0&-2&-1&1\end{array}\right]\to\\ &\to\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&1/2&1/2\\0&-2&-1&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&1/2&1/2\\0&1&1/2&-1/2\end{array}\right];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\mid I\right] &= \left[\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\1&-2&0&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}2&1&1&0\\0&-5/2&-1/2&1\end{array}\right]\to\\ &\to\left[\begin{array}{cc|cc}2&0&4/5&2/5\\0&-5/2&-1/2&1\end{array}\right]\to\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&2/5&1/5\\0&1&1/5&-2/5\end{array}\right].\end{aligned}$$

Logo,

$$\left(M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1/2&1/2\\1/2&-1/2\end{bmatrix} \ \text{ e } \ \left(M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1}=\begin{bmatrix}2/5&1/5\\1/5&-2/5\end{bmatrix}$$

e como tal, para $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$T_1^{-1}(x,y)=\left(M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2&1/2\\1/2&-1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y,\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right),$$

$$T_2^{-1}(x,y)=\left(M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/5&1/5\\1/5&-2/5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\left(\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y,\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}y\right),$$

e finalmente

$$\begin{aligned}\left(T_1^{-1}\circ T_2^{-1}\right)(x,y) &= T_1^{-1}\left(T_2^{-1}(x,y)\right)=\\ &= T_1^{-1}\left(\frac{2}{5}x+\frac{1}{5}y,\frac{1}{5}x-\frac{2}{5}y\right)=\\ &= \left(\frac{3}{10}x-\frac{1}{10}y,\frac{1}{10}x+\frac{3}{10}y\right).\end{aligned}$$

(vii) Tem-se

$$M((T_2\circ T_1)^{-1};\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)=M(T_1^{-1}\circ T_2^{-1};\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)=M(T_1^{-1};\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)M(T_2^{-1};\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)=$$

$$=\left(M(T_1;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1}\left(M(T_2;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2)\right)^{-1}=\begin{bmatrix}1/2&1/2\\1/2&-1/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2/5&1/5\\1/5&-2/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/10&-1/10\\1/10&3/10\end{bmatrix}.$$

De facto,

$$M((T_2 \circ T_1)^{-1}; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 3/10 & -1/10 \\ 1/10 & 3/10 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \left(M(T_2 \circ T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) \right)^{-1}.$$

(viii) Tendo em conta **(vii)** tem-se

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(x, y) = \begin{bmatrix} 3/10 & -1/10 \\ 1/10 & 3/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(\frac{3}{10}x - \frac{1}{10}y, \frac{1}{10}x + \frac{3}{10}y \right).$$

Logo, como seria de esperar,

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(x, y) = \left(T_1^{-1} \circ T_2^{-1} \right)(x, y).$$

6. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e a base canónica (ordenada)

$$\mathcal{B}_c^3 = \{v_1, v_2, v_3\} \quad \text{de} \quad \mathbb{R}^3, \quad \text{com} \quad v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1).$$

Suponha que se tem

$$T(v_3) = 3v_1 + v_2 - 2v_3, \qquad T(v_2 + v_3) = v_1 \qquad \text{e} \qquad T(v_1 + v_2 + v_3) = v_2 + v_3.$$

Logo,

$$T(0, 0, 1) = T(v_3) = (3, 1, -2),$$
$$T(0, 1, 0) = T(v_2) = T(v_2 + v_3) - T(v_3) = -2v_1 - v_2 + 2v_3 = (-2, -1, 2)$$

e

$$T(1, 0, 0) = T(v_1) = T(v_1 + v_2 + v_3) - T(v_2 + v_3) = -v_1 + v_2 + v_3 = (-1, 1, 1).$$

Assim:

(i)

$$T(2v_1 - v_2 + 3v_3) = 2T(v_1) - T(v_2) + 3T(v_3) =$$
$$= 2(-1, 1, 1) - (-2, -1, 2) + 3(3, 1, -2) = (9, 6, -6);$$

(ii)

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

(iii) Seja $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_c^3$ a base canónica ordenada de $\mathbb{R}^3$. Determinemos uma base ordenada $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ de modo a que a matriz $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$ que represente T em relação a essas bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ seja a matriz identidade:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se $T(1,0,0) = w_1$, $T(0,1,0) = w_2$ e $T(0,0,1) = w_3$. Logo,

$$\mathcal{B}_2 = \{(-1,1,1),(-2,-1,2),(3,1,-2)\}.$$

7. $V = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right)$ e $T : \mathcal{P}_1 \to V$ e uma transformação linear tal que

$$M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$$

com

$$\mathcal{B}_1 = \{1+t, 1-t\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Tem-se

$$V = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a - d = 0 \;\text{ e }\; a - b - c = 0\right\}.$$

(i) Seja $a_0 + a_1 t \in \mathcal{P}_1$. Tem-se $a_0 + a_1 t = \frac{1}{2}(a_0 + a_1)(1+t) + \frac{1}{2}(a_0 - a_1)(1-t)$ e como $M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$ então

$$\begin{aligned}
T(a_0 + a_1 t) &= T\left(\frac{1}{2}(a_0 + a_1)(1+t) + \frac{1}{2}(a_0 - a_1)(1-t)\right) = \\
&= \frac{1}{2}(a_0 + a_1)T(1+t) + \frac{1}{2}(a_0 - a_1)T(1-t) = \\
&= \frac{1}{2}(a_0 + a_1)\left(7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2}(a_0 - a_1)\left(-1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \begin{bmatrix} 7a_0 + 9a_1 & 4a_0 + 5a_1 \\ 3a_0 + 4a_1 & 7a_0 + 9a_1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(ii) $M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2)$ é do tipo 2×2 e car $M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2) = 2$ logo T é invertível, T^{-1} é linear e

$$M\left(T^{-1};\mathcal{B}_2;\mathcal{B}_1\right) = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}.$$

Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V$. Tem-se

$$\begin{bmatrix} b+c & b \\ c & b+c \end{bmatrix} = b\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + c\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

e

$$\begin{aligned}
T^{-1}\left(\begin{bmatrix} b+c & b \\ c & b+c \end{bmatrix}\right) &= bT^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + cT^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \\
&= b\left(\frac{1}{2}(1+t) + \frac{7}{2}(1-t)\right) + c\left(-\frac{1}{2}(1+t) - \frac{9}{2}(1-t)\right) = \\
&= 4b - 5c + (-3b + 4c)\,t.
\end{aligned}$$