IST - LEGM e MEC - Álgebra Linear - 1^o semestre 2018/2019

Resolução da 4^a ficha de exercícios

1. Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Podemos colocar os vectores do conjunto

$$\{(1,0,2),(0,1,2),(x,y,z)\}$$

como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 2 & 2 & z \end{bmatrix} \underset{-2L_1+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 2 & z-2x \end{bmatrix} \underset{-2L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-2x-2y \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Qualquer conjunto $\{(1,0,2),(0,1,2),(x,y,z)\}$ em que $z-2x-2y \neq 0$ constitui uma base de $\mathbb{R}^3$.

(ii) Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Podemos colocar os vectores do conjunto

$$\{(2,-1,1),(-4,2,1),(x,y,z)\}$$

como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & x \\ -1 & 2 & y \\ 1 & 1 & z \end{bmatrix} \underset{\substack{\frac{1}{2}L_1+L_2\to L_2 \\ -\frac{1}{2}L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -4 & x \\ 0 & 0 & y+\frac{x}{2} \\ 0 & 3 & z-\frac{x}{2} \end{bmatrix} \underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -4 & x \\ 0 & 3 & z-\frac{x}{2} \\ 0 & 0 & y+\frac{x}{2} \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, qualquer conjunto

$$\{(2,-1,1),(-4,2,1),(x,y,z)\}$$

em que $y + \frac{x}{2} \neq 0$ constitui uma base de $\mathbb{R}^3$.

(iii) Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Podemos colocar os vectores do conjunto

$$\{(-1,2,1),(1,0,-1),(x,y,z)\}$$

como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & x \\ 2 & 0 & y \\ 1 & -1 & z \end{bmatrix} \underset{\substack{2L_1+L_2\to L_2 \\ L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 1 & x \\ 0 & 2 & y+2x \\ 0 & 0 & z+x \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, qualquer conjunto

$$\{(-1,2,1),(1,0,-1),(x,y,z)\}$$

em que $z + x \neq 0$ constitui uma base de $\mathbb{R}^3$.

2. **(i)** Podemos colocar os coeficientes dos vectores do conjunto

$$\left\{2 + t - t^2, 2t + 2t^2, -t^2\right\}$$

como colunas de uma matriz A e de seguida aplicar a essa matriz o método de eliminação de Gauss:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1+L_2 \to L_2 \\ 2L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{L_1+L_2 \to L_2 \\ 2L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix} \underset{-L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz em escada A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo, o conjunto

$$\left\{2 + t - t^2, 2t + 2t^2, -t^2\right\},$$

formado por três vectores de $\mathcal{P}_2$, é linearmente independente. Como a dimensão de $\mathcal{P}_2$ é 3, então o conjunto

$$\left\{2 + t - t^2, 2t + 2t^2, -t^2\right\}$$

é desde logo uma base de $\mathcal{P}_2$ tendo-se

$$L\left(\left\{2 + t - t^2, 2t + 2t^2, -t^2\right\}\right) = \mathcal{P}_2$$

e

$$\dim L\left(\left\{2 + t - t^2, 2t + 2t^2, -t^2\right\}\right) = \dim \mathcal{P}_2 = 3.$$

Vamos agora escrever o vector $1 - t$ como combinação linear dos vectores da base

$$\left\{2 + t - t^2, 2t + 2t^2, -t^2\right\}.$$

Isto é, procuremos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$1 - t = \alpha(2 + t - t^2) + \beta(2t + 2t^2) + \gamma(-t^2).$$

Temos então:

$$\begin{cases} 2\alpha = 1 \\ \\ \alpha + 2\beta = -1 \\ \\ -\alpha + 2\beta - \gamma = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \\ \beta = -\frac{3}{4} \\ \\ \gamma = -2. \end{cases}$$

Pelo que

$$1 - t = \frac{1}{2}(2 + t - t^2) - \frac{3}{4}(2t + 2t^2) - 2(-t^2).$$

Finalmente e ainda em relação à base $\{2+t-t^2, 2t+2t^2, -t^2\}$ de $\mathcal{P}_2$, o vector cujas coordenadas são $(-1,3,2)$ nessa base, é dado por:

$$(-1)(2+t-t^2)+3(2t+2t^2)+2(-t^2) = -2+5t+5t^2.$$

(ii) Facilmente se vê que o conjunto $\{-1+2t+t^2, 2-t\}$ é linearmente independente. Logo, ele próprio é uma base de

$$L\left(\{-1+2t+t^2, 2-t\}\right),$$

e tem-se

$$\dim L\left(\{-1+2t+t^2, 2-t\}\right) = 2.$$

(iii) O conjunto $\{1,t,t^2\}$ é a base canónica de $\mathcal{P}_2$. As coordenadas do vector $-1+3t+2t^2$ em relação a essa base são precisamente $-1, 3$ e 2. Ainda em relação à base $\{1,t,t^2\}$, o vector cujas coordenadas nessa base são $(-1,3,2)$ é precisamente o vector $-1+3t+2t^2$.

3.

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \lambda_1 A + \lambda_2 B + \lambda_3 C = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1+\lambda_2 & \lambda_2 - \lambda_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_2 - \lambda_3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = -1. \end{cases}$$

Logo

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Seja $U = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right)$.
Existe $D \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que $D \notin U$ uma vez que

$$U \subset \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \underbrace{\dim \mathcal{U}}_{\leq 3} \; < \; \underbrace{\dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})}_{=4}.$$

Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U$. Tem-se $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U$ se e só se existirem escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha A + \beta B + \gamma C.$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha A + \beta B + \gamma C \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ \lambda_1+\lambda_2 & \lambda_2 - \lambda_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = b \\ \lambda_1 + \lambda_2 = c \\ \lambda_2 - \lambda_3 = d \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & 2 & b \\ 1 & 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & -1 & d \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2 \to L_2 \\ -L_1+L_3 \to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 1 & -1 & d \end{array}\right] \underset{\substack{-L_3+L_4 \to L_4 \\ \frac{1}{2}L_2+L_4 \to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{-L_3+L_4\to L_4\\ \frac{1}{2}L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 2 & b-a \\ 0 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & d+\frac{1}{2}(b+a)-c \end{array}\right] \underset{L_2\leftrightarrow L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 2 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & d+\frac{1}{2}(b+a)-c. \end{array}\right]$$

Logo, para que o sistema linear anterior seja possível é necessário que se tenha

$$d+\frac{1}{2}(b+a)-c=0.$$

Deste modo podemos escrever

$$U=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : d+\frac{1}{2}(b+a)-c=0\right\}$$

e assim, sendo $V=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : d+\frac{1}{2}(b+a)-c\neq 0\right\}$, tem-se

$$\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})=U\oplus V.$$

Ou seja, qualquer vector de V que não seja o vector nulo, esse vector não pertence a U. Por exemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \notin U = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right\}\right).$$

4. (i)

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \underset{2L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A)=L(\{(3,-6)\})$$

e o conjunto $\{(3,-6)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(A)=L(\{(3,1)\}),$$

e o conjunto $\{(3,1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$. Desta forma:

$$\mathrm{car}A=\dim\mathcal{C}(A)=\dim\mathcal{L}(A)=1.$$

Por definição:

$$\mathcal{N}(A)=\left\{u\in\mathbb{R}^2 : Au=\mathbf{0}\right\}.$$

Temos então, pelo método de eliminação de Gauss,

$$Au=\mathbf{0}\Leftrightarrow A'u=\mathbf{0}.$$

A equação

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente à equação

$$3u_1 + u_2 = 0.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(u_1, -3u_1) : u_1 \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1, -3)\}\right).$$

O conjunto $S = \{(1, -3)\}$ é linearmente independente. Como S é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(A)$, temos então que S é uma base de $\mathcal{N}(A)$ e:

$$\text{nul}A = \dim \mathcal{N}(A) = 1.$$

(ii)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \underset{-\frac{1}{3}L_1 + L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(3, 1)\}\right)$$

e o conjunto $\{(3, 1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(A) = L\left(\{(3, 0, -6, 0)\}\right),$$

e o conjunto $\{(3, 0, -6, 0)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$. Desta forma:

$$\text{car}A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = 1.$$

Por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^4 : Au = \mathbf{0}\right\}.$$

Temos então, pelo método de eliminação de Gauss,

$$Au = \mathbf{0} \Leftrightarrow A'u = \mathbf{0}.$$

A equação

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente à equação

$$3u_1 - 6u_3 = 0,$$

ou seja a

$$u_1 = 2u_3.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(2u_3, u_2, u_3, u_4) : u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Como

$$(2u_3, u_2, u_3, u_4) = u_3(2, 0, 1, 0) + u_2(0, 1, 0, 0) + u_4(0, 0, 0, 1),$$

tem-se:

$$\mathcal{N}(A) = L\left(\{(2,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}\right).$$

O conjunto $S = \{(2,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$ é linearmente independente. Como S é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(A)$, temos então que S é uma base de $\mathcal{N}(A)$ e:

$$\text{nul}A = \dim \mathcal{N}(A) = 3.$$

(iii)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As colunas da matriz A que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}\right)$$

e o conjunto $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(A) = L\left(\{(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}\right),$$

e o conjunto $\{(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ é uma base de $\mathcal{L}(A)$. Desta forma:

$$\text{car}A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = 3.$$

Por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^4 : Au = \mathbf{0}\right\}.$$

A equação

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \\ u_4 = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(u_1,0,0,0) : u_1 \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,0,0,0)\}\right).$$

O conjunto $S = \{(1,0,0,0)\}$ é linearmente independente. Como S é linearmente independente e gera $\mathcal{N}(A)$, temos então que S é uma base de $\mathcal{N}(A)$ e:

$$\text{nul}A = \dim \mathcal{N}(A) = 1.$$

(iv)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_1+L_2 \to L_2}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{-\frac{1}{3}L_2+L_3 \to L_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = A'.$$

As colunas da matriz A correspondentes às colunas da matriz A' que contêm os pivots, formam um conjunto de vectores linearmente independente. Logo,

$$\mathcal{C}(A) = L\left(\{(1,-1,0),(1,2,1),(-2,1,-1)\}\right)$$

e o conjunto $\{(1,-1,0),(1,2,1),(-2,1,-1)\}$ é uma base de $\mathcal{C}(A)$. Por outro lado,

$$\mathcal{L}(A) = L\left(\{(1,1,-2),(-1,2,1),(0,1,-1)\}\right) = L\left(\left\{(1,1,-2),(0,3,-1),(0,0,-\frac{2}{3})\right\}\right),$$

e quer o conjunto $\{(1,1,-2),(-1,2,1),(0,1,-1)\}$, quer o conjunto

$$\left\{(1,1,-2),(0,3,-1),(0,0,-\frac{2}{3})\right\},$$

são bases para $\mathcal{L}(A)$. Desta forma:

$$\text{car}A = \dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A) = 3.$$

Por definição:

$$\mathcal{N}(A) = \left\{u \in \mathbb{R}^3 : Au = \mathbf{0}\right\}.$$

Como se tem sempre:

$$\text{n}^o \text{ de colunas de } A = \text{car}A + \text{nul}A,$$

então

$$\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{0}\}$$

e

$$\text{nul}A = \dim \mathcal{N}(A) = 0.$$

Alternativamente poderíamos verificar que se tem mesmo

$$\mathcal{N}(A) = \{\mathbf{0}\}.$$

Pelo método de eliminação de Gauss, temos

$$Au = \mathbf{0} \Leftrightarrow A'u = \mathbf{0}.$$

A equação

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} u_1 + u_2 - 2u_3 = 0 \\ 3u_2 - u_3 = 0 \\ -\frac{2}{3}u_3 = 0 \end{cases}$$

ou seja a

$$u_1 = u_2 = u_3 = 0.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) = \{(0,0,0)\}$$

e como tal

$$\text{nul}A = \dim \mathcal{N}(A) = 0.$$

5.

$$U = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : p(-1) + p(1) = 0\} = L\left(\{-1+t^2, t\}\right).$$

a)

$$V = L\left(\{2+t, 1-t+3t^2, 1+t-t^2, 1+t^2\}\right) = L\left(\{1+t-t^2, 1+t^2\}\right).$$

Como

$$1+t-t^2 \in U \quad \text{e} \quad 1+t^2 \notin U$$

então

$$U \cap V = L\left(\{1+t-t^2\}\right)$$

e assim $\{1+t-t^2\}$ é uma base para $U \cap V$.

b) Por exemplo $W = L(\{t^2\})$ é um subespaço de $\mathcal{P}_2$ tal que

$$U \oplus W = \mathcal{P}_2,$$

uma vez que $\dim U = 2$, $\dim W = 1$ e $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

6. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\cdots}{\longrightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Uma base para U:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

7. a)

$$V_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x - y = 0\} = \{(y,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ y, z \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,1,0),(0,0,1)\}\right).$$

Como $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ é linearmente independente e gera V_1, é então uma base para V_1.

b) $V_2 = L\left(\{(1,0,1),(0,1,0)\}\right)$. Seja $(x,y,z) \in V_2$. Existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,y,z) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,0).$$

Logo, o seguinte sistema é possível:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 1 & 0 & z \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-x \end{array}\right]$$

se e só se $-x+z=0$. Assim:

$$V_2 = \mathcal{N}\left(\left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 1 \end{array}\right]\right).$$

c)

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2) = 2 + 2 - 3 = 1$$

uma vez que: $\{(1,1,0),(0,0,1)\}$ é base de V_1, $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ é base de V_2 e $\{(1,0,1),(0,1,0),(0,0,1)\}$ é base de V_1+V_2 (e assim $V_1+V_2=\mathbb{R}^3$)

d) Por exemplo, para $W = L(\{(0,1,0)\})$ tem-se

$$\mathbb{R}^3 = V_1 \oplus W$$

uma vez que $\mathbb{R}^3 = V_1 + W$ e $V_1 \cap W = \{(0,0,0)\}$.

8. Como

$$(0,1,-1,2) = -(0,1,1,0) + 2(0,1,0,1)$$

e $\{(0,1,1,0),(0,1,0,1)\}$ é linearmente independente então $\{(0,1,1,0),(0,1,0,1)\}$ é uma base para U. Logo $\dim U = 2$. Como

$$V = L(\{(0,1,0,1),(0,0,1,0)\})$$

e $\{(0,1,0,1),(0,0,1,0)\}$ é linearmente independente então $\dim V = 2$. Assim

$$U + V = L(\{(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,0)\})$$

e como $\{(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,0)\}$ é linearmente independente é então uma base para $U+V$ tendo-se $\dim(U+V)=3$ pelo que $U+V \neq \mathbb{R}^4$ uma vez que $\dim \mathbb{R}^4 = 4$. Além disso

$$\dim(U \cap V) = \dim U + \dim V - \dim(U+V) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

9. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{1, 1-t, t^2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_2$.

Sejam $1,2$ e 3 as coordenadas de um vector $p(t) \in \mathcal{P}_2$ em relação à base $\mathcal{B}_2$. Determinemos as coordenadas do mesmo vector $p(t)$ em relação à base $\mathcal{B}_1$.

Tem-se

$$p(t) = 1 + 2(1+t) + 3\left(1+t+t^2\right) = 6 + 5t + 3t^2 = \alpha 1 + \beta(1-t) + \gamma t^2.$$

É fácil ver que $\alpha = 11$, $\beta = -5$ e $\gamma = 3$.

10. Seja $B = \{v_1, v_2\}$ uma base ordenada de $\mathcal{P}_1$. Sejam $(1,-1)$ e $(2,2)$ respectivamente as coordenadas de dois polinómios $1+t$ e $1-t$ em relação à base B. Determine B.

Tem-se

$$\begin{cases} 1+t = v_1 - v_2 \\ 1-t = 2v_1 + 2v_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1+t \\ 1-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1+t \\ 1-t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{4}t \\ -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}t \end{bmatrix}.$$

Logo $B = \left\{ \frac{3}{4} + \frac{1}{4}t, -\frac{1}{4} - \frac{3}{4}t \right\}$.

11. a) Uma base para $\mathbb{R}^4$ que inclui dois vectores de U:

$$\{(1,1,1,1), (0,1,0,0), (0,0,1,1), (0,0,0,1)\}.$$

Note-se que $(1,1,1,1), (0,0,1,1) \in U$ e que 4 vectores de $\mathbb{R}^4$ linearmente independentes, formam uma base de $\mathbb{R}^4$.

b) Como

$$U = \{(y-z+w, y, z, w) : y, z, w \in \mathbb{R}\} = L\left(\{(1,1,0,0), (-1,0,1,0), (1,0,0,1)\}\right)$$

e

$$\dim U = 4 - \text{car}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = 3,$$

então uma base para U que inclua os vectores $(1,1,1,1)$ e $(-1,-1,1,1)$ pode ser:

$$\{(1,1,1,1), (-1,-1,1,1), (1,0,0,1)\}$$

uma vez que se trata de um conjunto linearmente independente de 3 vectores de U.

12. Seja

$$B = \begin{bmatrix} 4 & a & b \\ c & d & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

tal que

$$\dim \mathcal{N}(B) = 2 \qquad \text{e} \qquad (1,0,2) \in \mathcal{L}(B).$$

Como

$$\text{car}\, B = \dim \mathcal{L}(B) = 3 - \dim \mathcal{N}(B) = 1$$

então

$$\mathcal{L}(B) = L\left(\{(c,d,4)\}\right) = L\left(\{(4,a,b)\}\right) = L\left(\{(1,0,2)\}\right),$$

pelo que $a = d = 0$, $b = 8$ e $c = 2$.

13. a) Uma base para $\mathbb{R}^4$ que inclui dois vectores de U:

$$\{(1,1,0,-1), (1,1,0,1), (0,1,0,0), (0,0,1,0)\}$$

Note-se que $(1,1,0,-1), (1,1,0,1) \in U$ e que 4 vectores de $\mathbb{R}^4$ linearmente independentes, formam uma base de $\mathbb{R}^4$.

b) Seja $\mathcal{B} = \{(2,2,0,0),(1,1,0,1)\}$ uma base ordenada de U.
Tem-se

$$(1,1,0,-7) = 4(2,2,0,0) - 7\,(1,1,0,1)\,.$$

Logo, 4 e -7 são as coordenadas de $(1,1,0,-7)$ em relação à base $\mathcal{B}$

c) Determine uma base para $U+V$ e uma base para $U\cap V$, indicando as respectivas dimensões.

Tem-se (em $\mathbb{R}^4$) $U = L\left(\{(1,1,0,-1),(1,1,0,1)\}\right)$ e

$$V = \left\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : y = w\right\} = L\left(\{(1,0,0,0),(0,1,0,1)\,,(0,0,1,0)\}\right).$$

Como $(1,1,0,-1)\notin V$ e $(1,1,0,1)\in V$, então

$$\{(1,1,0,-1),(1,0,0,0),(0,1,0,1)\,,(0,0,1,0)\}$$

é uma base de $U+V$, tendo-se $\dim(U+V) = 4$, pelo que $U+V = \mathbb{R}^4$.
Além disso, como $U = L\left(\{(1,1,0,-1),(1,1,0,1)\}\right)$ e

$$(1,1,0,-1)\notin V, \quad (1,1,0,1)\in V$$

então $\{(1,1,0,1)\}$ é uma base de $U\cap V$, tendo-se $\dim(U\cap V) = 1$. De facto

$$\underbrace{\dim(U\cap V)}_{=1} = \underbrace{\dim U}_{=2} + \underbrace{\dim V}_{=3} - \underbrace{\dim(U+V)}_{=4}.$$

14. Como $\mathcal{C}\,(A+B)\subset\mathcal{C}\,(A)+\mathcal{C}\,(B)$ então

$$\operatorname{car}(A+B) = \dim\mathcal{C}\,(A+B) \le \dim\left(\mathcal{C}\,(A)+\mathcal{C}\,(B)\right).$$

Como

$$\mathcal{C}\,(AB)\subset\mathcal{C}\,(A) \quad \left(v\in\mathcal{C}\,(AB)\Rightarrow v = ABu = A\,(Bu)\Rightarrow v\in\mathcal{C}\,(A)\right)$$

e

$$\mathcal{C}\,(AB)\subset\mathcal{C}\,(B) \quad \left(v\in\mathcal{C}\,(AB)\Rightarrow v = ABu \underset{AB=BA}{=} BAu = B\,(AU)\Rightarrow v\in\mathcal{C}\,(B)\right)$$

então $\mathcal{C}\,(AB)\subset\mathcal{C}\,(A)\cap\mathcal{C}\,(B)$ e assim

$$\operatorname{car}(AB) = \dim\mathcal{C}\,(AB) \le \dim\left(\mathcal{C}\,(A)\cap\mathcal{C}\,(B)\right).$$

Logo

$$\begin{aligned}
\operatorname{car}(A+B)+\operatorname{car}(AB) &= \dim\mathcal{C}\,(A+B)+\dim\mathcal{C}\,(AB) \le \\
&\le \dim\left(\mathcal{C}\,(A)+\mathcal{C}\,(B)\right)+\dim\left(\mathcal{C}\,(A)\cap\mathcal{C}\,(B)\right) = \\
&= \dim\mathcal{C}\,(A)+\dim\mathcal{C}\,(B) = \operatorname{car}(A)+\operatorname{car}(B)\,.
\end{aligned}$$