

**Resolução da 3ª ficha de exercícios**

**1. (i)** Seja  $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$ . Tem-se  $U = \{(x, y, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ . Uma vez que

$$(x, y, x + y) = (x, 0, x) + (0, y, y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1),$$

para quaisquer  $x, y \in \mathbb{R}$ , tem-se:

$$U = L(\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}).$$

Logo,  $U$  é subespaço de  $\mathbb{R}^3$ . O conjunto  $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$  gera o subespaço  $U$ .

$U = \mathcal{N}(A)$  é subespaço de  $\mathbb{R}^3$ , com  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

**(ii)** Seja

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ e } x - y - z = 0\}.$$

Tem-se

$$U = \{(0, y, -y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Uma vez que

$$(0, y, -y) = y(0, 1, -1),$$

para qualquer  $y \in \mathbb{R}$ , tem-se:

$$U = L(\{(0, 1, -1)\}).$$

Logo,  $U$  é subespaço de  $\mathbb{R}^3$ . O conjunto  $\{(0, 1, -1)\}$  gera o subespaço  $U$ .

$U = \mathcal{N}(A)$  é subespaço de  $\mathbb{R}^3$ , com  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$ .

**2.** Seja  $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$  o espaço linear de todas as matrizes do tipo  $2 \times 3$  com entradas reais.

Seja  $U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) : a = -2c \text{ e } f = 2e + d \right\}$ . Tem-se

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} -2c & b & c \\ d & e & 2e + d \end{bmatrix} : b, c, d, e \in \mathbb{R} \right\}.$$

Uma vez que

$$\begin{bmatrix} -2c & b & c \\ d & e & 2e + d \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

para quaisquer  $b, c, d, e \in \mathbb{R}$ , tem-se:

$$U = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}\right).$$

Logo,  $U$  é subespaço de  $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ . O conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right\}$$

gera o subespaço  $U$ .

**3.** Considere, no espaço linear  $\mathbb{R}^4$ , os vectores  $v_1 = (1, 0, 0, 1)$ ,  $v_2 = (1, -1, 0, 0)$  e  $v_3 = (0, 1, 2, 1)$ . Tem-se

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -1 & | & 2 & | & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 4 & | & 0 & | & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 & | & 2 & | & -2 & | & 1 \\ 1 & 0 & 1 & | & 2 & | & 2 & | & 2 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_1+L_4 \rightarrow L_4} \\ & \xrightarrow{-L_1+L_4 \rightarrow L_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -1 & | & 2 & | & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 4 & | & 0 & | & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 & | & 2 & | & -2 & | & 1 \\ 0 & -1 & 1 & | & 3 & | & 0 & | & 1 & | & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{-L_2+L_4 \rightarrow L_4} \\ & \xrightarrow{-L_2+L_4 \rightarrow L_4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & | & -1 & | & 2 & | & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 4 & | & 0 & | & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & | & 2 & | & 2 & | & -2 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & -1 & | & 0 & | & 0 & | & -1 \end{bmatrix}. \quad (*) \end{aligned}$$

Logo,  $(2, 0, 2, 2), (1, 1, -2, 2) \in L(\{v_1, v_2, v_3\})$ , com

$$\begin{aligned} (2, 0, 2, 2) &= (1, 0, 0, 1) + (1, -1, 0, 0) + (0, 1, 2, 1) \\ (1, 1, -2, 2) &= 3(1, 0, 0, 1) + (-2)(1, -1, 0, 0) + (-1)(0, 1, 2, 1). \end{aligned}$$

Atendendo a (\*),  $(-1, 4, 2, 2), (0, 1, 1, 0) \notin L(\{v_1, v_2, v_3\})$ .

**4.** Sejam

$$u = (2, 1, 0), \quad v = (1, -1, 2) \quad \text{e} \quad w = (0, 3, -4).$$

O vector  $(a, b, c)$  de  $\mathbb{R}^3$  pertencerá a  $L(\{u, v, w\})$  se existirem  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$  tais que

$$(a, b, c) = \alpha(2, 1, 0) + \beta(1, -1, 2) + \gamma(0, 3, -4),$$

isto é, se o seguinte sistema (nas variáveis  $\alpha, \beta$  e  $\gamma$ ) fôr possível e determinado:

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = a \\ \alpha - \beta + 3\gamma = b \\ 2\beta - 4\gamma = c. \end{cases}$$

Considerando então a matriz aumentada deste sistema, tem-se:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & a \\ 1 & -1 & 3 & | & b \\ 0 & 2 & -4 & | & c \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}L_1+L_2 \rightarrow L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & a \\ 0 & -3/2 & 3 & | & b - a/2 \\ 0 & 2 & -4 & | & c \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{4}{3}L_2+L_3 \rightarrow L_3} \\ & \xrightarrow{\frac{4}{3}L_2+L_3 \rightarrow L_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & | & a \\ 0 & -3/2 & 3 & | & b - \frac{a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & | & c + \frac{4}{3}b - \frac{2}{3}a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, o vector  $(a, b, c)$  de  $\mathbb{R}^3$  pertencerá a  $L(\{u, v, w\})$  se:

$$c + \frac{4}{3}b - \frac{2}{3}a = 0.$$

**Observação:** Deste modo, tem-se  $L(\{u, v, w\}) \neq \mathbb{R}^3$ . De facto, uma vez que

$$v = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}w$$

tem-se  $L(\{u, v, w\}) = L(\{u, w\})$  e como tal  $\{u, v, w\}$  não pode gerar  $\mathbb{R}^3$ .

**5.** Seja  $U$  o subespaço de  $\mathbb{R}^4$  gerado por  $\{(1, 1, 0, -1), (1, 1, 0, 1)\}$ . Seja  $CS = \{(1, 0, 0, 2)\} + U$ .

**a)** Seja  $(x, y, z, w) \in U$ . Existem  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tais que

$$(x, y, z, w) = \alpha(1, 1, 0, -1) + \beta(1, 1, 0, 1). \quad (*)$$

Por outro lado, atendendo a

$$\left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & z \\ -1 & 1 & w \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{-L_1+L_2 \rightarrow L_2 \\ L_1+L_4 \rightarrow L_4}]{\quad} \left[ \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & y-x \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 2 & x+w \end{array} \right]$$

para que a equação  $(*)$  tenha solução é preciso que:  $y - x = 0$  e  $z = 0$ , ou seja  $(x, y, z, w) \in \mathcal{N}(A)$ , com

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Reciprocamente, se  $(x, y, z, w) \in \mathcal{N}(A)$  então  $(x, y, z, w) \in U$ . Logo  $U = \mathcal{N}(A)$ .

**b)** Pela alínea anterior:

$$CS = \{(1, 0, 0, 2)\} + U = \{(1, 0, 0, 2)\} + \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right).$$

Tem-se então o seguinte sistema linear (com 4 variáveis) não homogéneo

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

**6. a)** Como

$$p(-1) = 2p(0) - p(1) \Leftrightarrow a_0 - a_1 + a_2 = 2a_0 - (a_0 + a_1 + a_2) \Leftrightarrow a_2 = 0$$

então

$$\begin{aligned} U &= \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : p(-1) = 2p(0) - p(1)\} = \\ &= \{a_0 + a_1t + a_2t^2 : a_2 = 0\} = L(\{1, t\}). \end{aligned}$$

Por outro lado, atendendo a

$$\left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & a_0 \\ 1 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & a_2 \end{array} \right] \rightarrow \left[ \begin{array}{cc|c} -1 & 1 & a_0 \\ 0 & 1 & a_0 + a_1 \\ 0 & 0 & a_0 + a_1 + a_2 \end{array} \right]$$

$$a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \in V = L(\{-1 + t, 1 - t^2\}) \Leftrightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 0.$$

Logo

$$V = \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0 + a_1 + a_2 = 0\}.$$

Pelo que

$$\begin{aligned} U \cap V &= \{a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0 + a_1 + a_2 = 0 \text{ e } a_2 = 0\} = \\ &= \{-a_1 + a_1 t : a_1 \in \mathbb{R}\} = L(\{-1 + t\}). \end{aligned}$$

Como

$$-1 + t = (-1) \times 1 + 1 \times t$$

então

$$U + V = L(\{1, t, -1 + t, 1 - t^2\}) = L(\{1, t, 1 - t^2\}) = \mathcal{P}_2.$$

**b)** Basta ter, por exemplo,  $W = L(\{1\})$ , uma vez que, neste caso,  $W \cap V = \{\mathbf{0}\}$  e  $W + V = \mathcal{P}_2$ . Logo  $W \oplus V = \mathcal{P}_2$ .

**7. (i)** Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Tem-se  $\mathcal{C}(A) = L(\{(1, 0)\})$  e  $\mathcal{L}(A) = L(\{(1, -1)\})$ .

Seja  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow x - y = 0,$$

o núcleo de  $A$  é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \{u \in \mathbb{R}^2 : Au = \mathbf{0}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 0\} = \\ &= \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 1) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 1)\}). \end{aligned}$$

**(ii)** Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Tem-se  $\mathcal{C}(A) = L(\{(1, 0)\})$  e  $\mathcal{L}(A) = L(\{(1, 2, 3)\})$ .

Seja  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow x + 2y + 3z = 0,$$

o núcleo de  $A$  é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \{u \in \mathbb{R}^3 : Au = \mathbf{0}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\} = \\ &= \{(-2y - 3z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = \{y(-2, 1, 0) + z(-3, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= L(\{(-2, 1, 0), (-3, 0, 1)\}). \end{aligned}$$

(iii) Seja  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Tem-se  $\mathcal{C}(A) = \{(0, 0)\}$  e  $\mathcal{L}(A) = \{(0, 0, 0)\}$ .

O núcleo de  $A$  é dado por:  $\mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^3$ .

(iv) Seja  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Tem-se

$$\mathcal{C}(A) = L(\{(2, 0, 0), (1, 1, 0)\}) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A) = L(\{(2, 1, 1), (0, 0, 1)\}).$$

Seja  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

o núcleo de  $A$  é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \{u \in \mathbb{R}^3 : Au = \mathbf{0}\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y + z = 0 \text{ e } z = 0\} = \\ &= \{(x, -2x, 0) : x \in \mathbb{R}\} = \{x(1, -2, 0) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, -2, 0)\}). \end{aligned}$$

(v) Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ . Tem-se  $\mathcal{C}(A) = L(\{(1, 2, 2), (0, 3, 1)\})$  e  $\mathcal{L}(A) = L(\{(1, 0), (2, 3)\})$ ,

pois

$$(2, 1) = \frac{4}{3}(1, 0) + \frac{1}{3}(2, 3).$$

Seja  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x + 3y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

o núcleo de  $A$  é dado por:

$$\mathcal{N}(A) = \{u \in \mathbb{R}^2 : Au = \mathbf{0}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \text{ e } 2x + 3y = 0 \text{ e } 2x + y = 0\} = \{(0, 0)\}.$$

(vi) Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ . Tem-se

$$\mathcal{C}(A) = L(\{(1, 2, 2)\}) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A) = L(\{(1, 2)\}).$$

Seja  $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

o núcleo de  $A$  é dado por:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A) &= \{u \in \mathbb{R}^2 : Au = \mathbf{0}\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\} = \\ &= \{(-2y, y) : y \in \mathbb{R}\} = \{y(-2, 1) : y \in \mathbb{R}\} = L(\{(-2, 1)\}). \end{aligned}$$

(vii) Seja  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Tem-se  $\mathcal{C}(A) = \{(0, 0, 0)\}$  e  $\mathcal{L}(A) = \{(0, 0)\}$ . O núcleo de  $A$  é dado por:

$$\mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^2.$$

(viii) Seja  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Tem-se

$$\mathcal{C}(A) = L(\{(1, 2, 2), (0, 3, 1), (1, 0, 0)\}) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A) = L(\{(1, 0, 1), (2, 3, 0), (2, 1, 0)\}).$$

Seja  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Atendendo a que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y - 2z = 0 \\ 4z = 0 \end{cases}$$

o núcleo de  $A$  é dado por:

$$\mathcal{N}(A) = \{u \in \mathbb{R}^3 : Au = \mathbf{0}\} = \{(0, 0, 0)\}.$$

**Observação:** Como  $\mathcal{N}(A) = \{(0, 0, 0)\}$  e sendo  $A$  quadrada  $3 \times 3$ , tem-se  $\mathcal{L}(A) = \mathcal{C}(A) = \mathbb{R}^3$ .

8. Sejam  $V$  um espaço linear real e  $\mathbf{0}$  elemento neutro de  $V$ .

(i) Suponhamos que  $u + v = u + w$ . Queremos ver que  $v = w$ . Ora,

$$\begin{aligned} v &= \mathbf{0} + v = ((-u) + u) + v = (-u) + (u + v) \underset{u+v=u+w}{=} \\ &= (-u) + (u + w) = ((-u) + u) + w = \mathbf{0} + w = w. \end{aligned}$$

Logo,  $v = w$ .

(ii) Queremos ver que existindo elemento neutro de  $V$  este é único. Ora, seja  $w \in V$  tal que  $u + w = u$ , para todo o  $u \in \mathbf{V}$ . Então,

$$u + w = u = u + \mathbf{0} \xRightarrow{\text{por (i)}} w = \mathbf{0}.$$

**Demonstração alternativa de (ii)**

Sejam  $\mathbf{0}$  e  $\mathbf{0}'$  elementos neutros de  $V$ . Tem-se

$$\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}'.$$

(iii) Queremos ver que  $\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$  para todo o escalar  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ora,

$$\lambda \mathbf{0} + \mathbf{0} = \lambda \mathbf{0} = \lambda (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \lambda \mathbf{0} + \lambda \mathbf{0} \xRightarrow{\text{por (i)}} \mathbf{0} = \lambda \mathbf{0}.$$

**Demonstração alternativa de (iii)**

Como

$$\lambda \mathbf{0} = \lambda (\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \lambda \mathbf{0} + \lambda \mathbf{0}$$

e atendendo (por (ii)) à unicidade de elemento neutro, tem-se

$$\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

(iv) Queremos ver que  $0u = \mathbf{0}$  para todo o vector  $u \in \mathbf{V}$ . Ora,

$$0u + \mathbf{0} = 0u = (0 + 0)u = 0u + 0u \xRightarrow{\text{por (i)}} \mathbf{0} = 0u.$$

**Demonstração alternativa de (iv)**

Como

$$0u = (0 + 0)u = 0u + 0u$$

e atendendo (por (ii)) à unicidade de elemento neutro, tem-se

$$0u = \mathbf{0}.$$

(v) Queremos ver que  $-(-u) = u$  para todo o  $u \in \mathbf{V}$ . Ora,

$$u + (-u) = \mathbf{0} \xRightarrow{\text{por (i)}} -(-u) = u.$$

(vi) Queremos ver que o simétrico  $-u$  de um qualquer vector  $u$  de  $V$  é único. Ora, seja  $w \in V$  tal que  $u + w = \mathbf{0}$ . Então,

$$u + w = \mathbf{0} = u + (-u) \xRightarrow{\text{por (i)}} w = -u.$$

(vii) Queremos ver que  $(-1)u = -u$  para todo o  $u \in \mathbf{V}$ . Ora,

$$u + (-1)u = 1u + (-1)u = (1 + (-1))u = 0u = \mathbf{0}.$$

Logo, como o simétrico é único,  $(-1)u = -u$ .

**(viii)** Queremos ver que: se  $\lambda u = \mathbf{0}$ , então  $\lambda = 0$  ou  $u = \mathbf{0}$ . Suponhamos que  $\lambda u = \mathbf{0}$ . Se  $\lambda \neq 0$ , então

$$u = 1u = \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)u = \frac{1}{\lambda}(\lambda u) = \frac{1}{\lambda}\mathbf{0} \underset{\text{por (iii)}}{=} \mathbf{0}.$$

Como  $\lambda \neq 0 \implies u = \mathbf{0}$ , então  $u \neq \mathbf{0} \implies \lambda = 0$ . Logo,

$$\lambda u = \mathbf{0} \implies \lambda = 0 \vee u = \mathbf{0}$$

**(ix)** Queremos ver que: se  $u \neq \mathbf{0}$  e  $\alpha u = \beta u$ , então  $\alpha = \beta$ . Suponhamos que  $u \neq \mathbf{0}$  e  $\alpha u = \beta u$ . Ora, como  $u \neq \mathbf{0}$  e  $(\alpha - \beta)u = \mathbf{0}$ , então  $\alpha - \beta = 0$ , atendendo a (viii). Isto é,  $\alpha = \beta$ .

**9.** Seja  $y \in \mathcal{C}(A + B)$ . Então existe  $x$  tal que

$$y = (A + B)x = Ax + Bx \in \mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(B).$$

Logo

$$\mathcal{C}(A + B) \subset \mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(B).$$

**10.** Seja  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ . Vejamos que  $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(A^T) = \{\mathbf{0}\}$ . Seja  $y \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(A^T)$ . Então existe  $x$  tal que

$$Ay = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad y = A^T x.$$

Logo

$$y^T = x^T A$$

e

$$y^T y = (x^T A) y = x^T (Ay) = x^T \mathbf{0} = 0.$$

Isto é

$$\sum_{i=1}^n y_i^2 = y^T y = 0$$

ou seja

$$y = (y_1, \dots, y_n) = (0, \dots, 0) = \mathbf{0}.$$

Logo,

$$\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{L}(A) = \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(A^T) = \{\mathbf{0}\}.$$

**11.** Seja  $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$  tal que  $A^2 = A$ . Seja  $u \in \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(A)$ . Então

$$Au = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad u = Av$$

para algum  $v$ . Logo

$$\mathbf{0} = Au = A^2 v = Av$$

pelo que  $v \in \mathcal{N}(A)$ . Assim

$$u = Av = \mathbf{0}$$

e deste modo

$$\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(A) = \{\mathbf{0}\}.$$