IST - LEGM e MEC - Álgebra Linear - 1$^o$ semestre 2018/2019

**Resolução da 12$^a$ ficha de exercícios**

**1.** $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}\right) = -(\lambda - 3)(\lambda - 1)^2 .$$

Tem-se

$$\dim \mathcal{N}(A - 3I) = m_g(3) \underset{A \text{ é simétrica}}{=} m_a(3) = 1$$
$$\dim \mathcal{N}(A - 1I) = m_g(1) \underset{A \text{ é simétrica}}{=} m_a(1) = 2.$$

**2.**

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3),$$

pelo que $\{1, 2, 3\}$ é o conjunto dos valores próprios de $A$ com

$$m_a(1) = m_a(2) = m_a(3) = 1.$$

Sendo a matriz simétrica, os vectores próprios correspondentes a valores próprios distintos serão ortogonais. Como

$$\mathcal{N}(A - 1I) = \mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L(\{(-1, 0, 1)\}),$$

$$\mathcal{N}(A - 2I) = \mathcal{N}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L(\{(0, 1, 0)\})$$

e

$$\mathcal{N}(A - 3I) = \mathcal{N}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L(\{(1, 0, 1)\})$$

então

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), (0, 1, 0)\right\}$$

é uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de $A$.

**3.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Como $A$ não é simétrica, não é possível encontrar uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de $A$.

**4.** A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ não sendo simétrica não é ortogonalmente diagonalizável. No entanto, como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

então $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é normal e como tal é unitariamente diagonalizável.

**5.** Como $A$ é simétrica e como $1$ e $-1$ são os únicos valores próprios de $A$, uma vez que $m_g(1) = 2$,

então

$$\mathcal{N}(A+I) = (\mathcal{N}(A-I))^{\perp} = \mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L(\{(1,-1,0)\}).$$

Logo, aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt à base $\{(1,1,1),(2,2,1)\}$ do espaço

próprio $\mathcal{N}(A-I)$, obtem-se uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de $A$:

$$\left\{(1,-1,0),(1,1,1),(2,2,1) - \underset{(1,1,1)}{\operatorname{proj}}(2,2,1)\right\} = \left\{(1,-1,0),(1,1,1),(2,2,1) - \frac{5}{3}(1,1,1)\right\} =$$

$$= \left\{(1,-1,0),(1,1,1),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)\right\} \quad \text{ou ainda:} \quad \{(1,-1,0),(1,1,1),(1,1,-2)\}.$$

Logo

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}}_{P^T} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}}_{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**6.**

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-5).$$

Logo os valores próprios de $A$ são: $0, 1$ e $5$. Como $A$ é simétrica, então $A$ é ortogonalmente diagonalizável. Assim, uma vez que

$$\mathcal{N}(A) = L(\{(0,-2,1)\}), \qquad \mathcal{N}(A-I) = L(\{(1,0,0)\}) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{N}(A-5I) = L(\{(0,1,2)\})$$

tem-se uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de $A$:

$$\{(0,-2,1), (1,0,0), (0,1,2)\}.$$

Logo:

$$A = \left( \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}}_{P^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}}_{\sqrt{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}}_{P} \right)^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Logo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

é a matriz de valores próprios não negativos tal que $B^2 = A$.

**7.** Se $A$ (real) fôr ortogonal então $\det A = 1$ ou $\det A = -1$.

Sendo $A$ ortogonal, tem-se

$$A^T A = A A^T = I$$

pelo que

$$(\det A)^2 = \det A \det A = \det A^T \det A = \det\left(A^T A\right) = \det I = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\det A = 1 \quad \text{ou} \quad \det A = -1).$$

Sendo $A$ unitária, tem-se

$$A^H A = A A^H = I$$

pelo que

$$|\det A|^2 = \overline{\det A} \det A = \det A^H \det A = \det\left(A^H A\right) = \det I = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\det A| = 1.$$