

Resolução da 11ª ficha de exercícios

1. Sejam $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Consideremos a aplicação $\langle, \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 3x_1y_1 + 2x_2y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2.$$

Atendendo a que a matriz $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ é simétrica e tem os seus valores próprios (1 e 5) todos positivos, então esta aplicação define em $\mathbb{R}^2$ um produto interno. Além disso, verifica-se $\langle (1, 0), (0, 1) \rangle = 2$, uma vez que

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle (1, 0), (1, 0) \rangle & \langle (1, 0), (0, 1) \rangle \\ \langle (0, 1), (1, 0) \rangle & \langle (0, 1), (0, 1) \rangle \end{bmatrix}.$$

2. a)

$$U = \mathcal{N} \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right] = \mathcal{N} \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right] = L(\{(-1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 1)\}).$$

Logo

$$U^\perp = L(\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0)\}).$$

Como o conjunto $\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0)\}$ é ortogonal é então uma base ortogonal para $U^\perp$.

b)

$$d((1, 1, 1, 1), U) = \left\| \text{proj}_{U^\perp}(1, 1, 1, 1) \right\| = \left\| \text{proj}_{(1,1,1,1) \in U^\perp}(1, 1, 1, 1) \right\| = \| (1, 1, 1, 1) \| = 2.$$

c) Como $V = L(\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0)\}) = U^\perp$ então

$$\begin{aligned} (1, 0, 0, 0) &= \underbrace{P_U(1, 0, 0, 0)}_u + \underbrace{P_{U^\perp}(1, 0, 0, 0)}_v = u + \text{proj}_{(1,0,1,1)}(1, 0, 0, 0) + \text{proj}_{(0,1,0,0)}(1, 0, 0, 0) = \\ &= u + \frac{\langle (1, 0, 0, 0), (1, 0, 1, 1) \rangle}{\|(1, 0, 1, 1)\|^2} (1, 0, 1, 1) + \frac{\langle (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0) \rangle}{\|(0, 1, 0, 0)\|^2} (0, 1, 0, 0) = u + \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right). \end{aligned}$$

Logo

$$(1, 0, 0, 0) = \left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$$

com

$$\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) \in V \quad \text{e} \quad \left(\frac{2}{3}, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{3}(-1, 0, 1, 0) - \frac{1}{3}(-1, 0, 0, 1) \in U.$$

3. Como $V = L(\{(1, 0, 0), (0, 1, 1)\})$ então $V^\perp = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = L(\{(0, -1, 1)\})$.

Logo $\{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, -1, 1)\}$ é uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ que inclui um vector de $V^\perp$. Como os planos U e V são paralelos, tem-se:

$$d(U, V) = \|P_{V^\perp}((0, -1, 1) - (0, 0, 0))\|_{(0, -1, 1) \in V^\perp} = \|(0, -1, 1)\| = \sqrt{2}.$$

4. Um produto interno em $\mathbb{R}^3$ em relação ao qual a base $\mathcal{B} = \{(1, 0, -1), (0, 1, 0), (-1, 0, 2)\}$ é ortonormada, é dado por:

$$\begin{aligned} \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} G_{\mathcal{B}} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1 + x_3 & x_2 & x_1 + x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2y_1 + y_3 \\ y_2 \\ y_1 + y_3 \end{bmatrix} = \\ &= 5x_1y_1 + 3x_1y_3 + x_2y_2 + 3x_3y_1 + 2x_3y_3 \end{aligned}$$

com $G_{\mathcal{B}} = I$. Relativamente a ele, tem-se

$$\begin{aligned} (L(\{(-2, 0, 3), (0, 1, 0)\}))^\perp &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{G_{\mathcal{B}_c}}\right) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = L(\{(0, 0, 1)\}). \end{aligned}$$

Logo, o conjunto $\{(0, 0, 1)\}$ é uma base para $(L(\{(-2, 0, 3), (0, 1, 0)\}))^\perp$.

5. Em P_2 :

$$\langle p(t), q(t) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

Considere também o seguinte subespaço de P_2 :

$$U = \{p(t) \in P_2 : p(0) = 0\}.$$

(i) Em P_2 , para $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ e $q(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2$ tem-se

$$\begin{aligned} \langle p(t), q(t) \rangle &= p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1) = \\ &= (a_0 - a_1 + a_2)(b_0 - b_1 + b_2) + a_0b_0 + (a_0 + a_1 + a_2)(b_0 + b_1 + b_2) = \\ &= 3a_0b_0 + 2a_0b_2 + 2a_1b_1 + 2a_2b_0 + 2a_2b_2 = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_1 \end{bmatrix}.$$

Assim, relativamente à base canónica ordenada $\{1, t, t^2\}$ de P_2 :

$$\langle p(t), q(t) \rangle = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

onde

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle & \langle 1, t \rangle & \langle 1, t^2 \rangle \\ \langle t, 1 \rangle & \langle t, t \rangle & \langle t, t^2 \rangle \\ \langle t^2, 1 \rangle & \langle t^2, t \rangle & \langle t^2, t^2 \rangle \end{bmatrix}$$

Como $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ é simétrica e os seus valores próprios $(\frac{1}{2}\sqrt{17} + \frac{5}{2}, \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$ e 2) são todos positivos, logo, a aplicação $\langle, \rangle$ define um produto interno em P_2 .

(ii) Tem-se:

$$U^\perp = \{p(t) \in P_2 : \langle p(t), t \rangle = 0 \text{ e } \langle p(t), t^2 \rangle = 0\}.$$

Logo,

$$\begin{cases} (a_0 - a_1 + a_2)(-1)^2 + a_0 0 + a_0 + a_1 + a_2 = 0 \\ (a_0 - a_1 + a_2)(-1) + a_0 0 + a_0 + a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = -a_2 \\ a_1 = 0. \end{cases}$$

Logo,

$$U^\perp = \{-a_2 + a_2 t^2 : a_2 \in \mathbb{R}\} = L(\{-1 + t^2\}).$$

Como $\|-1 + t^2\| = 1$ então $\{-1 + t^2\}$ é uma base ortonormada de $U^\perp$.

Observação. Note que $P_2 = U \oplus U^\perp$, tendo-se, neste caso, $\dim U = 2$ e $\dim U^\perp = 1$.

(iii) Escolhendo um ponto de U , por exemplo t , a distância entre $1 + t$ e U é dada por:

$$d(1 + t, U) = \|P_{U^\perp}(1 + t - t)\| = \|P_{U^\perp}(1)\| = \|\langle 1, -1 + t^2 \rangle (-1 + t^2)\| = 1.$$

6. Considere no espaço linear $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ o produto interno definido da seguinte forma:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(AB^T).$$

Considere também o subespaço U de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ constituído por todas as matrizes simétricas reais do tipo 2×2 :

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : b = c \right\}.$$

(i) Tem-se:

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} : a, b, d \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right)$$

pois

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O conjunto $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base de U , uma vez que gera U , e é linearmente independente pois se tivermos:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

então

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ e como tal, o conjunto $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ é linearmente independente. Vamos aplicar agora a este conjunto o método de ortogonalização de Gram-Schmidt. Sejam

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \text{proj}_{A_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{proj}_{A_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{proj}_{A_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} A_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \text{proj}_{A_1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_1 \right\rangle A_1}{\|A_1\|^2} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\text{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A_1^T\right) A_1}{\|A_1\|^2} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\text{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) A_1}{\|A_1\|^2} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{0A_1}{\|A_1\|^2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
A_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{proj}_{A_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \text{proj}_{A_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_1 \right\rangle A_1}{\|A_1\|^2} - \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 \right\rangle A_2}{\|A_2\|^2} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\text{tr} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A_1^T \right) A_1}{\|A_1\|^2} - \frac{\text{tr} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A_2^T \right) A_2}{\|A_2\|^2} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\text{tr} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right) A_1}{\|A_1\|^2} - \frac{\text{tr} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right) A_2}{\|A_2\|^2} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{0A_1}{\|A_1\|^2} - \frac{0A_2}{\|A_2\|^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Logo, o conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base ortogonal de U . Como:

$$\begin{aligned}
\|A_1\| &= \sqrt{\langle A_1, A_1 \rangle} = \sqrt{\text{tr}(A_1 A_1^T)} = \sqrt{\text{tr} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)} = 1, \\
\|A_2\| &= \sqrt{\langle A_2, A_2 \rangle} = \sqrt{\text{tr}(A_2 A_2^T)} = \sqrt{\text{tr} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)} = \sqrt{2}, \\
\|A_3\| &= \sqrt{\langle A_3, A_3 \rangle} = \sqrt{\text{tr}(A_3 A_3^T)} = \sqrt{\text{tr} \left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)} = 1,
\end{aligned}$$

então o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base ortonormada de U .

(ii) Note-se que

$$\begin{aligned}
U^\perp &= \left\{ A : \left\langle A, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle A, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \left\langle A, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \right\} = \\
&= L \left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right)
\end{aligned}$$

e $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base ortonormada de $U^\perp$ uma vez que $\left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{2}$. A projecção

ortogonal da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ sobre $U^\perp$ é dada por:

$$\begin{aligned}
P_{U^\perp} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) &= \text{proj} \left[\begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \text{tr} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}^T \right) \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \text{tr} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \text{tr} \left(\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Como se tem:

$$\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) = U \oplus U^\perp,$$

então para todo $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = P_U \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) + P_{U^\perp} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
P_U \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - P_{U^\perp} \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

(iii) A matriz simétrica mais próxima da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz

$$P_U \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}.$$

(iv) A distância entre $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e U é dada por:

$$\begin{aligned}
d\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, U\right) &= \left\| P_{U^\perp} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) \right\| = \\
&= \left\| \text{proj} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\| = \\
&= \left\| \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\| = \\
&= \left| \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \right| = \\
&= \left| \text{tr} \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \right) \right| = \\
&= \left| \text{tr} \left(\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}b & -\frac{1}{2}\sqrt{2}a \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}d & -\frac{1}{2}\sqrt{2}c \end{bmatrix} \right) \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} |b - c|.
\end{aligned}$$

7. a) Os vectores $u_1 = (1, 1, 0, 0)$, $u_2 = (1, 0, 1, -1)$ formam uma base de V . Seja $\{v_1, v_2\}$ a base ortogonal de V que se obtém aplicando o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt aos vectores u_1 e u_2 . Portanto,

$$v_1 = u_1 = (1, 1, 0, 0)$$

e

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, u_1 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = (1, 0, 1, -1) - \frac{1}{2}(1, 1, 0, 0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
u = P_V(2, -2, 1, -1) &= \frac{\langle (2, -2, 1, -1), v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \frac{\langle (2, -2, 1, -1), v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 = \\
&= \frac{0}{2}(1, 1, 0, 0) + \frac{4}{5/2} \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, -1\right) = \left(\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}, \frac{8}{5}, -\frac{8}{5}\right)
\end{aligned}$$

e

$$v = P_{V^\perp}(2, -2, 1, -1) = (2, -2, 1, -1) - P_V(2, -2, 1, -1) = \left(\frac{6}{5}, -\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{3}{5}\right).$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
d((1, 1, 1, 1), V) &= \|P_{V^\perp}(1, 1, 1, 1)\| = \|(1, 1, 1, 1) - P_V(1, 1, 1, 1)\| = \\
&= \left\| (1, 1, 1, 1) - \frac{\langle (1, 1, 1, 1), v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle (1, 1, 1, 1), v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 \right\| = \\
&= \|(1, 1, 1, 1) - (1, 1, 0, 0)\| = \|(0, 0, 1, 1)\| = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

b) Como

$$x = y - 2z - 3w$$

e

$$(y - 2z - 3w, y, z, w) = y(1, 1, 0, 0) + z(-2, 0, 1, 0) + w(-3, 0, 0, 1)$$

concluí-se que

$$W = L((1, 1, 0, 0), (-2, 0, 1, 0), (-3, 0, 0, 1)).$$

Portanto,

$$W^\perp = \mathcal{N}(A)$$

$$\text{com } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

c) $(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, -1) \in W$, pelo que qualquer combinação linear entre eles também pertence a W (porque W é um espaço linear). Portanto $V \subset W$. Assim, $W^\perp \subset V^\perp$, donde

$$W^\perp \cap V^\perp = W^\perp.$$

Mais, $\{(1, -1, 2, 3)\}$ é uma base de $W^\perp$ pois

$$W^\perp = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \right).$$

d) Não, pois pela alínea c) podemos concluir que $W^\perp \subset V^\perp$ e portanto

$$W^\perp + V^\perp = V^\perp \neq \mathbb{R}^4.$$

8. a)

$$V^\perp = (\mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right))^\perp = \left((\mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right))^\perp \right)^\perp = \mathcal{L} \left(\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right).$$

Logo $\{(4, 3, 2, 1)\}$ é uma base ortogonal para $V^\perp$.

b)

$$d((1, 2, 3, 4), V^\perp) = \|(1, 2, 3, 4) - P_{V^\perp}(1, 2, 3, 4)\| = \left\| (1, 2, 3, 4) - \frac{2}{3}(4, 3, 2, 1) \right\| = \frac{5\sqrt{6}}{3}.$$

c) Os vectores $(0, 1, 1, 1)$ e $(1, -1, 1, 0)$ geram U e são ortogonais. Faltará encontrar uma base ortogonal para $U^\perp$. Como

$$U^\perp = \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = L(\{(-2, -1, 1, 0), (-1, -1, 0, 1)\}).$$

Atendendo ao método de ortogonalização de Gram-Schmidt,

$$\left\{ (-2, -1, 1, 0), (-1, -1, 0, 1) - \text{proj}_{(-2, -1, 1, 0)}(-1, -1, 0, 1) \right\} =$$

$$= \left\{ (-2, -1, 1, 0), (-1, -1, 0, 1) - \frac{1}{2}(-2, -1, 1, 0) \right\} = \\ = \left\{ (-2, -1, 1, 0), \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) \right\}$$

é uma base para $U^\perp$. Logo,

$$\left\{ (0, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 0), (-2, -1, 1, 0), \left(0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) \right\}$$

é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^4$ que inclui os vectores $(0, 1, 1, 1)$ e $(1, -1, 1, 0)$.

d)

$$U = L(\{(0, 1, 1, 1), (1, -1, 1, 0)\}) = \left(\mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \right)^\perp = \left(\mathcal{C} \left(\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \right)^\perp.$$

9. $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - 3z = 0\}$.

a) Como $W = L(\{(2, 1, 0), (3, 0, 1)\})$, então

$$(x - 1, y - 1, z - 1) \in W^\perp \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\langle (x - 1, y - 1, z - 1), (2, 1, 0) \rangle = 0 \text{ e } \langle (x - 1, y - 1, z - 1), (3, 0, 1) \rangle = 0) \\ \Leftrightarrow (2(x - 1) + (y - 1) = 0 \text{ e } 3(x - 1) + (z - 1) = 0) \Leftrightarrow (2x + y = 3 \text{ e } 3x + z = 4)$$

pelo que, as equações cartesianas da recta que passa pelo ponto $u = (1, 1, 1)$ e é perpendicular ao plano W são:

$$2x + y = 3 \text{ e } 3x + z = 4.$$

b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x, y, z), (1, -2, -3) \rangle = 0\}$. Logo, a equação cartesiana do plano que passa pelo ponto $u = (1, 1, 1)$ e é paralelo ao plano W é:

$$\langle (x - 1, y - 1, z - 1), (1, -2, -3) \rangle = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 3z = -4.$$

10. Seja $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Tem-se $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, uma vez que

$$T(1, 0, 0) = (0, 1, 0), \quad T(0, 1, 0) = (0, 1, 0) \text{ e } T(0, 0, 1) = (0, 0, 1).$$

Como

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda - 1)^2$$

então os valores próprios de T são: 0 e 1. Como

$$\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(A) = L(\{(-1, 1, 0)\}), \quad \mathcal{I}(T) = \mathcal{C}(A) = L(\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\})$$

e $\langle (-1, 1, 0), (0, 1, 0) \rangle = 1 \neq 0$ então $(\mathcal{N}(T))^\perp \neq \mathcal{I}(T)$, ou seja, T não é uma projecção ortogonal.