IST - LEGM e MEC - Álgebra Linear - 1^o semestre 2018/2019

Resolução da 10^a ficha de exercícios

1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que admite os vectores próprios

$$v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (-1, 0, 1), \quad v_3 = (0, 1, 0),$$

associados respectivamente aos valores próprios $1, 2$ e 3.

Determinemos a expressão geral de T.

Seja $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x, y, z) = \alpha(1, 2, 1) + \beta(-1, 0, 1) + \gamma(0, 1, 0).$$

Logo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 2 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 0 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 1 & y-2x \\ 0 & 2 & 0 & z-x \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & x \\ 0 & 2 & 1 & y-2x \\ 0 & 0 & -1 & z-y+x \end{array}\right]$$

e assim $\gamma = -x + y - z$, $\beta = \frac{1}{2}(-x + z)$, $\alpha = \frac{1}{2}(x + z)$. Pelo que

$$T(x, y, z) = \frac{1}{2}(x + z) T(1, 2, 1) + \frac{1}{2}(-x + z) T(-1, 0, 1) + (-x + y - z) T(0, 1, 0) =$$

$$= \frac{1}{2}(x + z)(1, 2, 1) + \frac{1}{2}(-x + z) 2(-1, 0, 1) + (-x + y - z) 3(0, 1, 0) =$$

$$= \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z, 3y - 2x - 2z, \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}x\right)$$

ou seja, a expressão geral de T é dada por:

$$T(x, y, z) = \left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z, 3y - 2x - 2z, \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}x\right).$$

2. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(1, 2) = (5, 5) = T(2, 1)$.

(i) Como

$$(1, -1) = -(1, 2) + (2, 1)$$

Tem-se

$$T(v_1) = T(1, -1) = T[-(1, 2) + (2, 1)] \underset{T \text{ é linear}}{=} -T(1, 2) + T(2, 1) =$$

$$= -(5, 5) + (5, 5) = (0, 0) = 0(1, -1) = 0v_1.$$

Como

$$(1, 1) = \frac{1}{3}(1, 2) + \frac{1}{3}(2, 1)$$

Tem-se

$$T(v_2) = T(1,1) = T\left[\frac{1}{3}(1,2) + \frac{1}{3}(2,1)\right] \underset{T \text{ é linear}}{=} \frac{1}{3}T(1,2) + \frac{1}{3}T(2,1) =$$

$$= \frac{1}{3}\left[(5,5) + (5,5)\right] = \frac{10}{3}(1,1) = \frac{10}{3}v_2.$$

Logo, v_2 é um vector próprio de T associado ao valor próprio $\frac{10}{3}$.

(ii) Como 0 é valor próprio de T então T não é invertível. Como os vectores $v_1 = (1,-1)$ e $v_2 = (1,1)$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$ pois são dois vectores linearmente independentes em $\mathbb{R}^2$ e $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ e além disso, v_1 e v_2 são vectores próprios de T, então existe uma base de $\mathbb{R}^2$ formada só com vectores próprios de T, ou seja, T é diagonalizável.

(iii) Seja $\mathcal{B}_{vp} = \{v_1, v_2\} = \{(1,-1),(1,1)\}$. Tem-se $M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$, uma vez que $T(v_1) = 0v_1 = 0v_1 + 0v_2$ e $T(v_2) = \frac{10}{3}v_2 = 0v_1 + \frac{10}{3}v_2$ e deste modo as coordenadas $(0,0)$ e $(0,\frac{10}{3})$ constituem respectivamente a 1^a e 2^a colunas de $M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})$.

Logo, $\mathcal{B}_{vp}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ em relação à qual T pode ser representada por uma matriz diagonal, por ser uma base formada só com vectores próprios de T.

(iv) Seja $A = M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})$, com $\mathcal{B}_{vp} = \{(1,-1),(1,1)\}$. O polinómio característico é dado por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\frac{10}{3} - \lambda\right).$$

Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$. Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{10}{3}.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T - \lambda_1 I) = \{\alpha(1,-1) + \beta(1,1) : (\alpha,\beta) \in \mathcal{N}(A - \lambda_1 I)\} = \\ &= \{\alpha(1,-1) + \beta(1,1) : (\alpha,\beta) \in L(\{(1,0)\})\} = \\ &= \{\alpha(1,-1) : \alpha \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,-1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,-1)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são

$$u = (s,-s), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(T - \lambda_2 I) = \{\alpha(1,-1) + \beta(1,1) : (\alpha,\beta) \in \mathcal{N}(A - \lambda_2 I)\} = \\ &= \{\alpha(1,-1) + \beta(1,1) : (\alpha,\beta) \in L(\{(0,1)\})\} = \\ &= \{\beta(1,1) : \beta \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = \frac{10}{3}$ são

$$u = (s, s)\,, \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

3. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que em relação à base ordenada $\mathcal{B}_1 = \{(1,2)\,,(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Tem-se $\det(A - 0I) = \det A = -5 \neq 0$. Logo, como 0 não é valor próprio de T então T é invertível.

Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$.

O polinómio característico é dado por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 9 = [(2-\lambda) - 3]\,[(2-\lambda) + 3] =$$

$$= (-1-\lambda)\,(5-\lambda)$$

Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 5.$$

Como T tem 2 valores próprios distintos, os vectores próprios correspondentes a cada um deles irão ser linearmente independentes e como tal irá existir uma base de $\mathbb{R}^2$ formada só com vectores próprios de T, ou seja, T é diagonalizável.

(ii) O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T - \lambda_1 I) = \{\alpha(1,2) + \beta(2,1) : (\alpha,\beta) \in \mathcal{N}(A - (-1)\,I)\} = \\ &= \left\{\alpha(1,2) + \beta(2,1) : (\alpha,\beta) \in \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\right)\right\} = \\ &= \left\{\alpha(1,2) + \beta(2,1) : (\alpha,\beta) \in \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right\} = \\ &= \{\alpha(1,2) + \beta(2,1) : (\alpha,\beta) \in L(\{(-1,1)\})\} = \\ &= \{\gamma(-1,1) : \gamma \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1,1)\})\,. \end{aligned}$$

O conjunto $\{(-1,1)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = -1$ são

$$u = (-s, s), \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}\left(T-\lambda_1 I\right)=\left\{\alpha(1,2)+\beta(2,1):(\alpha,\beta)\in\mathcal{N}\left(A-5I\right)\right\}= \\
&= \left\{\alpha(1,2)+\beta(2,1):(\alpha,\beta)\in\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}\right)\right\}= \\
&= \left\{\alpha(1,2)+\beta(2,1):(\alpha,\beta)\in\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right)\right\}= \\
&= \left\{\alpha(1,2)+\beta(2,1):(\alpha,\beta)\in L\left(\{(1,1)\}\right)\right\}= \\
&= \left\{\gamma(1,1):\gamma\in\mathbb{R}\right\}=L\left(\{(1,1)\}\right).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2=5$ são

$$u=(s,s), \text{ com } s\in\mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

(iii) É possível ter uma base de $\mathbb{R}^2$ constituída só por vectores próprios de T:

$$\mathcal{B}_{vp}=\{(-1,1),(1,1)\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1}+\dim E_{\lambda_2}=2=\dim\mathbb{R}^2.$$

Logo,

$$M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

uma vez que

$$T(-1,1)=\lambda_1(-1,1)=\lambda_1(-1,1)+0(1,1)$$

e

$$T(1,1)=\lambda_2(1,1)=0(-1,1)+\lambda_2(1,1).$$

Deste modo, $(\lambda_1,0)$ e $(0,\lambda_2)$ constituem respectivamente a 1^a e 2^a colunas de $M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})$.

Além disso, sendo $\mathcal{B}_1=\{(1,2),(2,1)\}$, tem-se

$$M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})=S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_{vp}}A\left(S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1}$$

com

$$\left(S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1}=S_{\mathcal{B}_{vp}\to\mathcal{B}_1}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A=M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_1)$$

uma vez que

$$(-1,1)=(1,2)-(2,1) \quad \text{e} \quad (1,1)=\frac{1}{3}(1,2)+\frac{1}{3}(2,1).$$

Logo, a matriz A é diagonalizável e tem-se

$$D=PAP^{-1}$$

com

$$P^{-1}=S_{\mathcal{B}_{vp}\to\mathcal{B}_1}=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D=M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Observação:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1) & \underset{T}{\xrightarrow{A}} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_1) \\ P^{-1} \uparrow I & & I \downarrow P \\ (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{vp}) & \underset{D}{\xrightarrow{T}} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{vp}) \end{array}$$

4. a) e **b)** Como

$$T(-1,1,-1) = -2(-1,1,-1), \quad T(1,0,1) = -2(1,0,1) \quad \text{e} \quad T(-1,0,1) = 0(-1,0,1)$$

então

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{N}(T - (-2)I) \oplus \mathcal{N}(T - 0I)$$

com

$$\dim \mathcal{N}(T - (-2)I) = 2 \quad \text{e} \quad \dim \mathcal{N}(T - 0I) = 1.$$

Logo -2 e 0 são os únicos valores próprios de T.

Como

$$\mathcal{N}(T - (-2)I) = L(\{(-1,1,-1),(1,0,1)\})$$

e

$$(1,1,1) = (-1,1,-1) + 2(1,0,1)$$

então

$$(1,1,1) \in \mathcal{N}(T - (-2)I)$$

e assim $(1,1,1)$ é vector próprio de T associado ao valor próprio -2.

5. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) O polinómio característico é dado por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 = \lambda^2 - 4\lambda + 4.$$

Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$. Logo, o valor próprio de T é

$$\lambda = 2.$$

O subespaço próprio E_λ é dado por

$$\begin{aligned} E_\lambda &= \mathcal{N}(T - \lambda I) = \mathcal{N}(A - 2I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\right\} = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1,0)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,0)\}$ é uma base de E_λ.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda = 2$ são

$$u = (s, 0), \text{ com } s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

(ii) Não existe nenhuma base de $\mathbb{R}^2$ constituída só por vectores próprios de T uma vez que $\dim E_\lambda = 1 < 2 = \dim \mathbb{R}^2$. Logo, T não é diagonalizável.

6. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T(x, y, z) = (3x, 2y + z, 2z)$. Seja $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0) = (3, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 2, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 1, 2)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de A.

(i) O polinómio característico é dado por

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(2-\lambda)^2 = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12.$$

Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$. Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T - \lambda_1 I) = \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \{(x, y, z) : y = z = 0\} = \\ &= \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 0, 0)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1, 0, 0)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 3$ são

$$u = (s, 0, 0), \text{ com } s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(T - \lambda_2 I) = \mathcal{N}(A - \lambda_2 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{(x, y, z) : x = z = 0\} = \\ &= \{(0, y, 0) : y \in \mathbb{R}\} = L(\{(0, 1, 0)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(0,1,0)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = 2$ são

$$u = (0, s, 0), \quad \text{com} \quad s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

(ii) Não existe nenhuma base de $\mathbb{R}^3$ constituída só por vectores próprios de T uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

Logo, a matriz A não é diagonalizável, isto é, não existe nenhuma base de $\mathbb{R}^3$ em relação à qual T possa ser representada por uma matriz diagonal.

7. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (y + z, 2y + z, y + 2z).$$

Seja $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0) = (0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (1, 2, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (1, 1, 2)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de A.

(i) O polinómio característico é dado por

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda (2-\lambda)^2 + \lambda = -\lambda \left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = \\ &= -\lambda \left[((2-\lambda) - 1)((2-\lambda) + 1)\right] = -\lambda (1-\lambda)(3-\lambda) \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 3\lambda. \end{aligned}$$

(ii) Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$. Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_3 = 3.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T - \lambda_1 I) = \mathcal{N}(A - \lambda_1 I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \{(x, y, z) : y = z = 0\} = \\ &= \{(x, 0, 0) : x \in \mathbb{R}\} = L(\{(1, 0, 0)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(1,0,0)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são

$$u = (s, 0, 0), \text{ com } s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(T - \lambda_2 I) = \mathcal{N}(A - \lambda_2 I) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \{(x, y, z) : -x + y + z = 0 \text{ e } y + z = 0\} = \\
&= \{(x, y, z) : x = 0 \text{ e } y + z = 0\} = \\
&= \{(0, -z, z) : z \in \mathbb{R}\} = L(\{(0, -1, 1)\}).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(0, -1, 1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = 1$ são

$$u = (0, -s, s), \text{ com } s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_3} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_3} &= \mathcal{N}(T - \lambda_3 I) = \mathcal{N}(A - \lambda_3 I) = \\
&= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\
&= \{(x, y, z) : -3x + y + z = 0 \text{ e } -y + z = 0\} = \\
&= \left\{(x, y, z) : x = \frac{2}{3}z \text{ e } y = z\right\} = \\
&= \left\{\left(\frac{2}{3}z, z, z\right) : z \in \mathbb{R}\right\} = L(\{(2, 3, 3)\}).
\end{aligned}$$

O conjunto $\{(2, 3, 3)\}$ é uma base de E_{λ_3}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_3 = 3$ são

$$u = (2s, 3s, 3s), \text{ com } s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

(iii) É possível ter uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída só por vectores próprios de T:

$$\mathcal{B}_{vp} = \{(1, 0, 0), (0, -1, 1), (2, 3, 3)\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} + \dim E_{\lambda_3} = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

Logo, a matriz que representa T na base $\mathcal{B}_{vp}$ é dada por

$$M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1,0,0) = (0,0,0) = 0(1,0,0) + 0(0,-1,1) + 0\,(2,3,3)\,,$$

$$T(0,-1,1) = (0,-1,1) = 0(1,0,0) + 1(0,-1,1) + 0\,(2,3,3)$$

e

$$T\,(2,3,3) = (6,9,9) = 0(1,0,0) + 0(0,-1,1) + 3\,(2,3,3)\,.$$

Deste modo, $(\lambda_1, 0, 0)$, $(0, \lambda_2, 0)$ e $(0, 0, \lambda_3)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de $M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp})$.

(iv) Seja A a matriz que representa T na base canónica de $\mathbb{R}^3$, isto é, $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Tem-se, por **(iii)**,

$$M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Logo, atendendo ao diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) & \xrightarrow[T]{A} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_c^3) \\ \left(S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1} \uparrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}} \\ (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{vp}) & \xrightarrow[M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})]{T} & (\mathbb{R}^3, \mathcal{B}_{vp}) \end{array}$$

tem-se

$$D = PAP^{-1},$$

com

$$D = M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

com

$$P^{-1} = \left(S_{\mathcal{B}_c^3 \to \mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp} \to \mathcal{B}_c^3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3).$$

Isto é, a matriz A é diagonalizável e a matriz $M(T; \mathcal{B}_{vp}; \mathcal{B}_{vp})$ é diagonal.

(v) Atendendo a que

$$D = PAP^{-1},$$

tem-se

$$A = P^{-1}DP.$$

Logo,

$$\begin{aligned} A^n &= P^{-1}D^nP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3}3^n & \frac{1}{3}3^n \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n \\ 0 & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$T^n(x,y,z) = A^n \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}3^n y + \frac{1}{3}3^n z \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n\right) y + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n\right) z \\ \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n\right) y + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}3^n\right) z \end{bmatrix},$$

para todo o $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

8. Considere a transformação linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por $T(A) = A + A^T$.

(i) Seja

$$\mathcal{B}_c^{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a base canónica (ordenada) de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

A matriz $M(T; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}_c^{2\times 2})$ que representa T em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^{2\times 2}$ é dada por

$$M(T; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}_c^{2\times 2}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Seja $A = M(T; \mathcal{B}_c^{2\times 2}; \mathcal{B}_c^{2\times 2})$. O polinómio característico é dado por

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 \left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = \\ &= (2-\lambda)^2 \left[((1-\lambda) - 1)((1-\lambda) + 1)\right] = \\ &= -\lambda (2-\lambda)^3 . \end{aligned}$$

Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A - \lambda I) = 0$. Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T-\lambda_1 I) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : (T-\lambda_1 I)\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) - \lambda_1 I\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_1 a & \lambda_1 b \\ \lambda_1 c & \lambda_1 d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : 2a = 0 \text{ e } b+c=0 \text{ e } 2d=0 \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : c \in \mathbb{R} \right\} = \\
&= L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right).
\end{aligned}$$

O conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -s \\ s & 0 \end{bmatrix}, \text{ com } s \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned}
E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(T-\lambda_2 I) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : (T-\lambda_2 I)\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) - \lambda_2 I\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda_2 a & \lambda_2 b \\ \lambda_2 c & \lambda_2 d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 2a & b+c \\ c+b & 2d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2a & 2b \\ 2c & 2d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \begin{bmatrix} 0 & -b+c \\ -c+b & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : b = c \right\} = \\
&= \left\{ \begin{bmatrix} a & c \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : a, c, d \in \mathbb{R} \right\} = \\
&= L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right).
\end{aligned}$$

O conjunto $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = 2$ são

$$U = \begin{bmatrix} r & s \\ s & t \end{bmatrix}, \text{ com } r \neq 0 \text{ ou } s \neq 0 \text{ ou } t \neq 0.$$

(iii) É possível ter uma base de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ constituída só por vectores próprios de T:

$$\mathcal{B}_{vp} = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\},$$

uma vez que

$$\dim E_{\lambda_1} + \dim E_{\lambda_2} = 4 = \dim \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}).$$

Logo, a matriz que representa T na base $\mathcal{B}_{vp}$ é dada por

$$M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 0\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, $(\lambda_2, 0, 0, 0)$, $(0, \lambda_2, 0, 0)$, $(0, 0, \lambda_1, 0)$ e $(0, 0, 0, \lambda_2)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a, 3^a e 4^a colunas de $M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})$.

Logo, atendendo ao diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathcal{B}_c^{2\times 2}) & \xrightarrow[T]{A} & (\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathcal{B}_c^{2\times 2}) \\ \left(S_{\mathcal{B}_c^{2\times 2}\to\mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1} \uparrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^{2\times 2}\to\mathcal{B}_{vp}} \\ (\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathcal{B}_{vp}) & \xrightarrow[M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})]{T} & (\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \mathcal{B}_{vp}) \end{array}$$

tem-se

$$D = PAP^{-1},$$

com

$$D = M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp}) = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

com

$$P^{-1} = \left(S_{\mathcal{B}_c^{2\times 2}\to\mathcal{B}_{vp}}\right)^{-1} = S_{\mathcal{B}_{vp}\to\mathcal{B}_c^{2\times 2}} \quad \text{e} \quad A = M(T;\mathcal{B}_c^{2\times 2};\mathcal{B}_c^{2\times 2}).$$

Isto é, a matriz A é diagonalizável e a matriz $M(T;\mathcal{B}_{vp};\mathcal{B}_{vp})$ é diagonal.

9. $T(1) = 2(1+t) + 1 - t = 3 + t$ e $T(t) = 1 + t + 2(1-t) = 3 - t$. Logo

$$M\left(T;\mathcal{B}_c^2;\mathcal{B}_c^2\right) = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e os valores próprios de T são os zeros de: $\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, ou seja, $\lambda = 1+\sqrt{7}$ ou $\lambda = 1-\sqrt{7}$.

10. a) Como $T(1+t) = 9(1+t)$ então $1+t$ é um vector próprio de T associado ao valor próprio 9 de T. Como

$$\begin{aligned} T(1) &= T((2-2t) + (-1+2t)) \underset{T \text{ é linear}}{=} T(2-2t) + T(-1+2t) = \\ &= 6 - 2t + 6t = 6 + 4t \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T(t) &= \frac{1}{2}T(2t) = \frac{1}{2}\left(T((2-2t) + 2(-1+2t))\right) \underset{T \text{ é linear}}{=} \frac{1}{2}T(2-2t) + T(-1+2t) = \\ &= \frac{1}{2}(6-2t) + 6t = 3 + 5t \end{aligned}$$

então os valores próprios de T são os da matriz

$$M(T;\{1,t\},\{1,t\}) = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Atendendo a que

$$\det\left(\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} - \lambda I\right) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 11\lambda + 18 = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 9 \text{ ou } \lambda = 2),$$

logo os valores próprios de T são 2 e 9.

b) Como $\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 6-2 & 3 \\ 4 & 5-2 \end{bmatrix}\right) = L(\{(-3,4)\})$, o vector $(-3)1 + 4t$ é um vector próprio de T associado ao valor próprio 2. Assim e atendendo à alínea anterior, o conjunto $\{-3+4t, 1+t\}$ é uma base de $\mathcal{P}_1$ formada por vectores próprios de T.

11. **(i)** Seja $v \in V$. Considere-se
$$u = v - T(v).$$
Como $T^2 = T$ então
$$T(u) = T(v - T(v)) = T(v) - T^2(v) = T(v) - T(v) = \mathbf{0}$$
e assim $u \in \mathcal{N}(T)$. Logo
$$v = u + T(v)$$
com $u \in \mathcal{N}(T)$ e $T(v) \in \mathcal{I}(T)$. E esta decomposição é única porque
$$\mathcal{N}(T) \cap \mathcal{I}(T) = \{\mathbf{0}\}.$$
De facto, sendo $v \in \mathcal{N}(T) \cap \mathcal{I}(T)$ tem-se $T(v) = \mathbf{0}$ e
$$v = T(w) = T(T(w)) = T(v)$$
e assim $v = \mathbf{0}$. Logo
$$V = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{I}(T).$$

(ii) $(\subset)$ Seja $v \in \mathcal{I}(T)$. Então existe $u \in U$ tal que $v = T(u)$. Como
$$(T - I)(v) = T(v) - v = T(T(u)) - v = T(u) - v = \mathbf{0}$$
então $v \in \mathcal{N}(T - I)$. Logo
$$\mathcal{I}(T) \subset \mathcal{N}(T - I).$$

$(\supset)$ Seja $v \in \mathcal{N}(T - I)$. Então $(T - I)(v) = \mathbf{0}$, isto é, $T(v) - I(v) = \mathbf{0}$, ou seja
$$v = I(v) = T(v) \in \mathcal{I}(T).$$
Logo
$$\mathcal{N}(T - I) \subset \mathcal{I}(T).$$
Logo
$$\mathcal{N}(T - I) = \mathcal{I}(T).$$

(iii) Seja λ um valor próprio de T. Logo existe $v \neq \mathbf{0}$ tal que
$$T(v) = \lambda v.$$
Por outro lado, como
$$\lambda v = T(v) = T^2(v) = (T \circ T)(v) = T(T(v)) = T(\lambda v) \underset{T \text{ é linear}}{=} \lambda T(v) = \lambda \lambda v = \lambda^2 v$$
tem-se
$$\lambda v = \lambda^2 v \Leftrightarrow \lambda(1 - \lambda) v = \mathbf{0} \underset{v \neq \mathbf{0}}{\Leftrightarrow} (\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad \lambda = 1).$$

Logo $\{\lambda : \lambda$ é valor próprio de $T\} \subset \{0,1\}$.

(iv) Por **(iii)** tem-se $\mathcal{N}(T) \neq \{\mathbf{0}\}$ e $\mathcal{N}(T-I) \neq \{\mathbf{0}\}$ e por **(i)** e **(ii)** tem-se

$$V = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{I}(T) = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{N}(T-I)$$

e como a dimensão de V é finita

$$n = \dim V = \dim \mathcal{N}(T-0I) + \dim \mathcal{N}(T-1I) = m_g(0) + m_g(1)$$

e assim T é então diaginalizável, isto é, existirá assim uma base de V formada só por vectores próprios de T.

12. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (x, y, -x-y).$$

(i) Determinemos os valores próprios e os subespaços próprios de T.
Seja $\mathcal{B}_c^3 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Seja $A = M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)$. Tem-se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1,0,0) = (1,0,-1)$, $T(0,1,0) = (0,1,-1)$ e $T(0,0,1) = (0,0,0)$ constituem respectivamente a 1^a, 2^a e 3^a colunas de A.

Determinemos os valores próprios de T. Os valores próprios de T são os valores próprios de A, isto é, são os valores de λ para os quais $\det(A-\lambda I) = 0$.

O polinómio característico é dado por

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2.$$

Logo, os valores próprios de T são

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1.$$

O subespaço próprio E_{λ_1} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_1} &= \mathcal{N}(T-\lambda_1 I) = \mathcal{N}(A-0I) = \\ &= \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} = L(\{(0,0,1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(0,0,1)\}$ é uma base de E_{λ_1}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_1 = 0$ são

$$u = (0, 0, s), \text{ com } s \in \mathbb{R} \backslash \{0\}.$$

O subespaço próprio E_{λ_2} é dado por

$$\begin{aligned} E_{\lambda_2} &= \mathcal{N}(T - \lambda_2 I) = \mathcal{N}(A - I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\} = \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y - z\right\} = \\ &= \{(-y - z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} = L(\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}). \end{aligned}$$

O conjunto $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ é uma base de E_{λ_2}.

Os vectores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda_2 = 1$ são

$$u = (-s - t, s, t), \text{ com } s \neq 0 \text{ ou } t \neq 0.$$

(ii) Tem-se $T^2 = T$, razão pela qual a transformação linear T é uma projecção. Como $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1), (0, 0, 1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de T, cujos valores próprios associados são respectivamente 1 e 0, tendo-se

$$\begin{aligned} T(-1, 1, 0) &= 1(-1, 1, 0) = (-1, 1, 0) \\ T(-1, 0, 1) &= 1(-1, 0, 1) = (-1, 0, 1) \\ T(0, 0, 1) &= 0(0, 0, 1) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Assim, T projecta os elementos de $\mathbb{R}^3$ sobre um plano, paralelamente a um vector, sendo o plano dado por:

$$L(\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\})$$

isto é, por:

$$x + y + z = 0$$

e o vector dado por:

$$(0, 0, 1).$$

13. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que representa geometricamente a projecção sobre o plano $x + y + z = 0$, paralelamente ao vector $(0, 0, 1)$.

(i) O plano

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\} = L(\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\})$$

é tal que

$$T(-1, 1, 0) = (-1, 1, 0) \quad \text{e} \quad T(-1, 0, 1) = (-1, 0, 1)$$

e o vector $(0,0,1)$ é tal que

$$T(0,0,1)=(0,0,0)$$

Ou seja, os vectores que definem o plano são vectores (de $\mathcal{I}(T)$) (linearmente independentes) próprios de T associados ao valor próprio 1 e o vector $(0,0,1)$ é um vector (de $\mathcal{N}(T)$) próprio de T associado ao valor próprio 0.

(ii) Seja $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Como

$$\{(-1,1,0),(-1,0,1),(0,0,1)\}$$

é uma base de $\mathbb{R}^3$, as coordenadas de (x,y,z) em relação à base ordenada anterior irão ser α,β,γ tais que

$$(x,y,z)=\alpha(-1,1,0)+\beta(-1,0,1)+\gamma(0,0,1).$$

Atendendo a

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 0 & x+y \\ 0 & 1 & 1 & z \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 0 & x+y \\ 0 & 0 & 1 & x+y+z \end{array}\right]$$

e assim $\gamma=x+y+z$, $\beta=-x-y$, $\alpha=y$. Pelo que

$$T(x,y,z)=yT(-1,1,0)+(-x-y)\,T(-1,0,1)+(x+y+z)\,T(0,0,1)=$$

$$=y(-1,1,0)+(-x-y)\,(-1,0,1)+(x+y+z)\,(0,0,0)=$$

$$=(x,y,-x-y),$$

isto é, a expressão geral de T é dada por:

$$T(x,y,z)=(x,y,-x-y).$$