

7^a ficha de exercícios para as aulas práticas

1. Considere a transformação linear $T_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $T_1(x, y) = (2x+y, 0, x+2y)$. Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja representação matricial em relação à base (ordenada) $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ de \mathbb{R}^3 e à base canónica \mathcal{B}_c^2 de \mathbb{R}^2 é dada pela matriz:

$$M(T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (i) Determine $T_2(0, 1, 0)$ e $T_2(0, 0, 1)$.
 (ii) Determine uma base para o contradomínio $\mathcal{I}(T_1)$ de T_1 e diga se T_1 é sobrejectiva.
 (iii) Determine uma base para o núcleo $\mathcal{N}(T_2)$ de T_2 e diga se T_2 é injectiva.
 (iv) Determine a solução geral da equação $(T_2 \circ T_1)(x, y) = (-1, 1)$.
2. Considere a transformação linear $T_1 : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_1$ cuja representação matricial em relação às bases ordenadas $\mathcal{B}_1 = \{1+t, 1-t, t^2\}$ de \mathcal{P}_2 e $\mathcal{B}_2 = \{1+t, 1+2t\}$ de \mathcal{P}_1 , é dada pela matriz:

$$M(T_1; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_2$ tal que

$$T_2(1) = 1 - t \quad T_2(t) = 2 + 8t - 2t^2.$$

- a) Determine a matriz $M(T_2; \mathcal{B}; \mathcal{B}_1)$ que representa T_2 em relação às bases ordenadas $\mathcal{B} = \{1, t\}$ de \mathcal{P}_1 e $\mathcal{B}_1 = \{1+t, 1-t, t^2\}$ de \mathcal{P}_2 .
 b) Determine uma base para $\mathcal{N}(T_1)$ (núcleo de T_1) e diga se T_1 é sobrejectiva.
 c) Determine $T_1(t)$ e encontre, em \mathcal{P}_2 , a solução geral da equação $T_1(p(t)) = t$.
 d) Verifique que $T_1 \circ T_2 = I$.

3. Seja $U = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right\}\right)$ e seja $V = L(\{1+t, t+t^2\})$ subespaço de \mathcal{P}_2 . Considere a transformação linear $T : U \rightarrow V$ definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right) = t + t^2 \quad \text{e} \quad T\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right) = 1 + t.$$

- a) Determine a matriz que representa a aplicação linear T em relação às bases

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right\} \quad \text{e} \quad \{1+2t+t^2, 1-t^2\}$$

de U e V respectivamente. Diga se T é um isomorfismo.

- b) Determine a expressão geral de T , isto é, determine $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$, para todo o $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in U$.

4. Considere a base ordenada $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3\}$ de \mathcal{P}_2 onde

$$p_1(t) = 1 + 2t + 3t^2, \quad p_2(t) = 2 + 3t, \quad p_3(t) = 1.$$

Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{P}_2$ definida por:

$$T(p_1(t)) = p_2(t), \quad T(p_2(t)) = p_3(t), \quad T(p_3(t)) = 0.$$

- a)** Determine a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ que representa T na base \mathcal{B} .
b) Calcule $T^3(p(t))$, para todo o $p(t) \in \mathcal{P}_2$.
c) Determine uma base para o núcleo de T e uma base para o contradomínio de T .
d) Resolva, em \mathcal{P}_2 , a equação linear $T(p(t)) = 3 + 3t$.
5. Seja $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$ e considere as transformações lineares

$$T_2 : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathbb{R}^4 \quad \text{e} \quad T_3 : V \rightarrow \mathcal{P}_1$$

tais que

$$T_2(1-t) = (0, 0, 0, 2) \quad T_2(1+t) = (0, 0, 2, 0) \quad \text{e} \quad M(T_3; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

e com $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{1+t, 1-t\}$ bases ordenadas de V e de \mathcal{P}_1 respectivamente.

- a)** Determine uma base para $\mathcal{I}(T_2)$.
b) Resolva em V a equação linear $T_3 \left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \right) = 3 - t$.
c) Determine a expressão geral de $T_2 \circ T_3$, isto é, determine, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, $(T_2 \circ T_3) \left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \right)$.
6. Considere a transformação linear $T_1 : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ definida por:

$$T_1(p(t)) = \begin{bmatrix} p(-1) + p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) + p(1) \end{bmatrix}.$$

Considere ainda a transformação linear $T_2 : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_1$ tal que

$$T_2(2-2t) = 6-2t \quad T_2(-1+2t) = 6t \quad T_2(1+t) = 9+9t.$$

- a)** Diga se T_2 é sobrejectiva.
b) Determine a expressão geral de T_1 .
c) Determine uma base para $\mathcal{I}(T_1) + \mathcal{I}(T_1)$.
d) Resolva, em \mathcal{P}_1 , a equação linear $(T_1 \circ T_2)(p(t)) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.