

3ª ficha de exercícios para as aulas práticas

1. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$. Escreva cada um dos seguintes conjuntos na forma $\mathcal{N}(A)$, explicitando a matriz A . Explique porque são esses conjuntos subespaços de $\mathbb{R}^3$ e indique possíveis conjuntos geradores para cada um deles.

(i) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$

(ii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ e } x - y - z = 0\}$

2. Seja $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ o espaço linear de todas as matrizes do tipo $m \times n$ com entradas reais. Explique porque é o seguinte conjunto um subespaço de $\mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ e indique um possível conjunto gerador.

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) : a = -2c \text{ e } f = 2e + d \right\}.$$

3. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^4$, os vectores $v_1 = (1, 0, 0, 1)$, $v_2 = (1, -1, 0, 0)$ e $v_3 = (0, 1, 2, 1)$. Diga quais dos seguintes vectores pertencem ao subespaço $L(\{v_1, v_2, v_3\})$:

$$(-1, 4, 2, 2), \quad (2, 0, 2, 2), \quad (1, 1, -2, 2), \quad (0, 1, 1, 0).$$

4. Seja $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Determine as condições que a, b, c deverão verificar para que se tenha $(a, b, c) \in L(\{u, v, w\})$ onde

$$u = (2, 1, 0), \quad v = (1, -1, 2) \text{ e } w = (0, 3, -4).$$

5. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $\{(1, 1, 0, -1), (1, 1, 0, 1)\}$. Seja

$$CS = \{(1, 0, 0, 2)\} + U$$

a) Encontre uma matriz 2×4 cujo núcleo seja igual a U .

b) Determine um sistema de duas equações lineares cujo conjunto solução seja CS .

6. Considere os seguintes subespaços U e V de $\mathcal{P}_2$:

$$U = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : p(-1) = 2p(0) - p(1)\}, \quad V = L(\{-1 + t, 1 - t^2\}).$$

a) Determine $u_1, u_2, u_3, v \in \mathcal{P}_2$ tais que

$$U + V = L(\{u_1, u_2, u_3\}) \text{ e } U \cap V = L(\{v\}).$$

b) Determine um subespaço W de $\mathcal{P}_2$ tal que $\mathcal{P}_2 = V \oplus W$.

7. Determine conjuntos geradores para o espaço das colunas, o espaço das linhas e o núcleo das seguintes matrizes, indicando em cada caso o menor número possível de vectores geradores de cada um deles.

$$\begin{array}{llll}
 \text{(i)} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{(ii)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{(iii)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{(iv)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \text{(v)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} & \text{(vi)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} & \text{(vii)} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{(viii)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

8. Seja V um espaço linear real e $\mathbf{0}$ o seu vector nulo. Mostre que:

- (i) Se $u + v = u + w$, então $v = w$.
- (ii) Mostre que o vector nulo $\mathbf{0} \in V$ é único.
- (iii) $\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.
- (iv) $0u = \mathbf{0}$ para todo o vector $u \in \mathbf{V}$.
- (v) $-(-u) = u$ para todo o $u \in \mathbf{V}$.
- (vi) Mostre que o simétrico $-u$ de um qualquer vector u de V é único.
- (vii) $(-1)u = -u$ para todo o $u \in \mathbf{V}$.
- (viii) Se $\lambda u = \mathbf{0}$, então $\lambda = 0$ ou $u = \mathbf{0}$.
- (ix) Se $u \neq \mathbf{0}$ e $\alpha u = \beta u$, então $\alpha = \beta$.

9. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$. Mostre que $\mathcal{C}(A + B) \subset \mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(B)$.

10. Seja $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$. Mostre que $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{L}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

11. Seja $A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = A$. Mostre que $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(A) = \{\mathbf{0}\}$.