

12^a ficha de exercícios para as aulas teóricas entre os dias 4 e 11 de Dezembro

1. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Calcule as dimensões dos espaços próprios de A sem os determinar.

2. Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A .

3. Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Diga se é possível encontrar uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A . Caso seja possível, determine essa base.

4. Considere o produto interno usual. Justifique a seguinte afirmação. A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

não é ortogonalmente diagonalizável, no entanto, é unitariamente diagonalizável.

5. Considere o produto interno usual. Determine uma matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ cujos valores próprios sejam 1 e -1 , e tal que $\mathcal{N}(A - I) = L(\{(1, 1, 1), (2, 2, 1)\})$.

6. Considere o produto interno usual. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Determine a matriz B de valores próprios não negativos tal que $B^2 = A$.

7. Mostre que se uma matriz for ortogonal então o seu determinante ou é 1 ou é -1 . E se a matriz for unitária?