IST - LEGM e MEC - Álgebra Linear - 1^o semestre 2018/2019

10^a ficha de exercícios para as aulas práticas

1. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que admite os vectores próprios

$$v_1 = (1,2,1), \qquad v_2 = (-1,0,1), \qquad v_3 = (0,1,0),$$

associados respectivamente aos valores próprios $1, 2$ e 3.

Determine a expressão geral de T.

2. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(1,2) = (5,5) = T(2,1)$.

(i) Verifique que os vectores $v_1 = (1,-1)$ e $v_2 = (1,1)$ são vectores próprios de T.

(ii) Diga se T é invertível e se T é diagonalizável.

(iii) Indique uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$ relativamente à qual a matriz que representa T seja uma matriz diagonal.

(iv) Determine os valores próprios e os subespaços próprios de T.

3. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que em relação à base ordenada $\{(1,2),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine os valores próprios de T e diga se T é invertível e se T é diagonalizável.

(ii) Determine bases para os subespaços próprios de T.

(iii) Diagonalize a transformação linear T, isto é, determine uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$ relativamente à qual a matriz que represente T seja uma matriz diagonal.

4. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$T(-1,1,-1) = (2,-2,2), \qquad T(1,0,1) = (-2,0,-2), \qquad T(-1,0,1) = (0,0,0).$$

a) Diga quais são os valores próprios de T.

b) Diga se $(1,1,1)$ é vector próprio de T.

5. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ que em relação à base canónica de $\mathbb{R}^2$ é representada pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Determine os valores próprios e os subespaços próprios de T.

(ii) Mostre que não existe nenhuma base de $\mathbb{R}^2$ constituída por vectores próprios de T. T é diagonalizável?

6. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (3x, 2y+z, 2z).$$

(i) Determine os valores próprios e bases dos subespaços próprios de T.

(ii) Mostre que não existe nenhuma base de $\mathbb{R}^3$ em relação à qual T possa ser representada por uma matriz diagonal.

7. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x,y,z) = (y+z, 2y+z, y+2z).$$

(i) Determine o polinómio característico de T.

(ii) Determine os valores próprios e bases dos subespaços próprios de T.

(iii) Determine uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de T. Determine a matriz que representa T nesta base ordenada.

(iv) Seja A a matriz que representa T na base canónica de $\mathbb{R}^3$, isto é, $A = M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3)$. Diagonalize a matriz A. Isto é, determine uma matriz de mudança de base P^{-1} e uma matriz diagonal D tais que $D = PAP^{-1}$.

(v) Determine A^n e $T^n(x,y,z)$.

8. Considere a transformação linear $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(A) = A + A^T.$$

(i) Escolha uma base ordenada para $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ e determine a matriz que representa T em relação a essa base ordenada.

(ii) Determine os valores próprios e os vectores próprios de T.

(iii) Diga se T pode ou não ser representada por uma matriz diagonal em relação a uma base ordenada apropriada de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Em caso afirmativo, indique uma tal base ordenada e a correspondente matriz diagonal que representa T.

9. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_1$ definida por

$$M\left(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

onde $\mathcal{B}_c^2 = \{1, t\}$ e $\mathcal{B} = \{1+t, 1-t\}$ são duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$. Determine os valores próprios de T.

10. Seja $\mathcal{P}_1 = \{p(t) = a_0 + a_1 t : a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 1. Considere ainda a transformação linear $T : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_1$ tal que

$$T(2-2t) = 6-2t \qquad T(-1+2t) = 6t \qquad T(1+t) = 9+9t.$$

a) Determine os valores próprios de T.

b) Determine uma base de $\mathcal{P}_1$ formada só por vectores próprios de T.

11. Sejam V um espaço linear e $T : V \to V$ uma transformação linear tal que

$$T^2 = T,$$

isto é,

$$T \circ T = T,$$

à qual se dá o nome de **projecção**. Mostre que

(i)

$$V = \mathcal{N}(T) \oplus \mathcal{I}(T)$$

(ii)

$$\mathcal{I}(T) = \mathcal{N}(T - I)$$

(iii) $\{\lambda : \lambda \text{ é valor próprio de } T\} \subset \{0, 1\}$.

(iv) se além disso $\dim V < \infty$ então T é diagonalizável.

12. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y, z) = (x, y, -x - y).$$

(i) Determine os valores próprios e os subespaços próprios de T.

(ii) A transformação linear T representa geometricamente uma projecção sobre um plano, paralelamente a um vector. Determine esse plano e esse vector.

13. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que representa geometricamente a projecção sobre o plano $x + y + z = 0$, paralelamente ao vector $(0, 0, 1)$.

(i) Explique o significado do plano e do vector referidos no enunciado.

(ii) Determine a expressão geral de T.