

Resolução da 8ª ficha de exercícios

1. (i) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{vmatrix} = a^5 + b^5 \neq 0$ se e só se $a \neq -b$, logo a matriz é invertível se e só se $a \neq -b$.

(ii) $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & \pi & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 9 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = -2(-1)^6 \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & \sqrt{3} \end{vmatrix} =$
 $= -2(-1)^6(-3)^6 \begin{vmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = -6(-1)^5 \begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$, logo a matriz é invertível.

2. a) $A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{\alpha L_1 + L_2 \rightarrow L_2 \\ -L_1 + L_4 \rightarrow L_4}]{\quad} \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ 0 & \alpha^2 - 1 & -\alpha & -\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \alpha \end{bmatrix}.$

Logo $\text{car } A_\alpha = \begin{cases} 2 & \text{se } \alpha = 1 \\ 3 & \text{se } \alpha = -1 \\ 4 & \text{se } \alpha \neq 1 \text{ e } \alpha \neq -1. \end{cases}$

A_α é 4×4 . Logo A_α é invertível se e só se $\text{car } A_\alpha = 4$. Assim, A_α é invertível se e só se $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

b) $\det((A_0)^n + (A_0)^{n+2}) = \det[(A_0)^n(I + (A_0)^2)] =$

$= \underbrace{(\det A_0)^n}_{=1} \det(I + (A_0)^2) = \det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 20.$

c) $((A_\alpha)^{-1})_{(3,1)} = \frac{1}{\det A_\alpha} (\text{cof } A_\alpha)_{(1,3)} = \frac{1}{(1-\alpha)^2(1+\alpha)} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & \alpha & -\alpha \end{vmatrix} =$

$$= \frac{1 - \alpha^2}{(1 - \alpha)^2 (1 + \alpha)} = \frac{1}{1 - \alpha}.$$

$$\begin{aligned} \mathbf{3.} \det(2B^T ABA^{-1} - 3B^T) &= \det(B^T (2ABA^{-1} - 3I)) = \det B^T \det(A(2B - 3I)A^{-1}) = \\ &= \det B \det A \det(2B - 3I) \det A^{-1} = (-1) \det \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 5. \end{aligned}$$

$$\mathbf{4.} \begin{vmatrix} 2i & 2h & 2g \\ f - 3c & e - 3b & d - 3a \\ c & b & a \end{vmatrix} = 10$$

$$\begin{aligned} \mathbf{5.} \det\left(-2C^T \left(-\frac{2}{3}D^3\right)^{-1} \left((D^T)^{-1}C\right)^{-1}\right) &= (-2)^3 \det(C^T) \frac{1}{\det\left(-\frac{2}{3}D^3\right)} \frac{1}{\det\left((D^T)^{-1}C\right)} = \\ &= -8(\det C) \left(-\frac{3}{2}\right)^3 \frac{1}{(\det D)^3} \frac{\det D}{\det C} = 8 \frac{1}{(\det D)^2} \frac{27}{8} = \frac{27}{36} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

$\mathbf{6.}$ O coeficiente de x^3 na expressão $\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ é -1 , uma vez que as permutações correspondentes ao produto $\underbrace{x \times 1 \times x \times x}_{=x^3}$ são $\underbrace{(1234)}_{\text{par}}$ (a das linhas) e $\underbrace{(2134)}_{\text{ímpar}}$ (a das colunas).

$$\mathbf{7.} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 5 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{100C_1 + 10C_2 + C_3 \rightarrow C_3}{=} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 533 \\ 7 & 1 & 715 \\ 8 & 7 & 871 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 13\alpha \\ 7 & 1 & 13\beta \\ 8 & 7 & 13\gamma \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 5 & 3 & \alpha \\ 7 & 1 & \beta \\ 8 & 7 & \gamma \end{vmatrix}.$$

$\mathbf{8.}$ Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$ com n ímpar e tal que $a_{ij} + a_{ji} = 0$, para todos os $i, j = 1, \dots, n$. Mostre que A não é invertível.

Dem. $(a_{ij} + a_{ji} = 0, \text{ para todos os } i, j = 1, \dots, n) \Leftrightarrow A^T = -A$. Logo

$$\det A = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^n \det A \underset{n \text{ é ímpar}}{=} -\det A \Leftrightarrow \det A = 0.$$

Pelo que A não é invertível.