

Resolução da 6ª ficha de exercícios

1. (i) Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $T(x, y) = (x + 2y, 3x - y)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0) = (1, 3)$ e $T(0, 1) = (2, -1)$.

(ii) Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $T(x, y) = (1 - y, 2x)$. T não é linear pois $T(0, 0) = (1, 0) \neq (0, 0)$.

(iii) Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (x, 2x, -x)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0) = (1, 2, -1)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0, 0)$.

(iv) Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $T(x, y, z) = (0, 0)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0) = T(0, 1, 0) = T(0, 0, 1) = (0, 0)$.

(v) Seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $T(x, y) = -3x$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c) = \begin{bmatrix} -3 & 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0) = -3$ e $T(0, 1) = 0$. Note que $\mathcal{B}_c = \{1\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}$.

(vi) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (0, -1, 2)$. T não é linear pois $T(0, 0, 0) = (0, -1, 2) \neq (0, 0, 0)$.

(vii) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $T(x) = (2x, 0, -x)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1) = (2, 0, -1)$.

(viii) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $T(x, y, z) = (x^2 - y, 2y)$. T não é linear, pois por exemplo:

$$T((1, 0, 0) + (1, 0, 0)) = T(2, 0, 0) = (4, 0) \neq (2, 0) = T(1, 0, 0) + T(1, 0, 0).$$

(ix) Seja $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $T(x, y, z, w) = (x - y, 3w)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^4; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0, 0) = (1, 0)$, $T(0, 1, 0, 0) = (-1, 0)$, $T(0, 0, 1, 0) = (0, 0)$ e $T(0, 0, 0, 1) = (0, 3)$.

(x) Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ com $T(x, y, z) = (-z, y - 2z, 2y, y + z)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^4) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1, 2, 1)$ e $T(0, 0, 1) = (-1, -2, 0, 1)$.

(xi) Seja $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $T(x) = (0, 0)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1) = (0, 0)$.

(xii) Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (x + 2y, 3z, x - z)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$, $T(0, 1, 0) = (2, 0, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 3, -1)$.

(xiii) Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $T(x, y, z) = (x, y, z)$. T é linear e tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que $T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$ e $T(0, 0, 1) = (0, 0, 1)$.

(xiv) Seja $T : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ com $T(p(t)) = \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix}$.

T é linear uma vez que, para todos os $p(t), p_1(t), p_2(t) \in \mathcal{P}_2$, para todo o $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} T(p_1(t) + p_2(t)) &= T((p_1 + p_2)(t)) = \begin{bmatrix} (p_1 + p_2)(1) & (p_1 + p_2)(0) \\ (p_1 + p_2)(0) & (p_1 + p_2)(-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_1(1) + p_2(1) & p_1(0) + p_2(0) \\ p_1(0) + p_2(0) & p_1(-1) + p_2(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1(1) & p_1(0) \\ p_1(0) & p_1(-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_2(1) & p_2(0) \\ p_2(0) & p_2(-1) \end{bmatrix} = \\ &= T(p_1(t)) + T(p_2(t)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\lambda p(t)) &= T((\lambda p)(t)) = \begin{bmatrix} (\lambda p)(1) & (\lambda p)(0) \\ (\lambda p)(0) & (\lambda p)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda p(1) & \lambda p(0) \\ \lambda p(0) & \lambda p(-1) \end{bmatrix} = \\ &= \lambda \begin{bmatrix} p(1) & p(0) \\ p(0) & p(-1) \end{bmatrix} = \lambda T(p(t)). \end{aligned}$$

Sendo $\mathcal{B}_1 = \{1, t, t^2\}$ a base canónica de $\mathcal{P}_2$ e

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a base canónica de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad T(t^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(xv) Seja $T : \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ com $T(X) = \text{tr}(X) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Resolva ainda a equação

linear $T(X) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. Seja

$$\mathcal{B}_c^{2 \times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Logo

$$M(T; \mathcal{B}_c^{2 \times 2}; \mathcal{B}_c^{2 \times 2}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Considere as transformações lineares T_1 e T_2 cujas matrizes que as representam em relação às bases canônicas (ordenadas) de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ são dadas respectivamente por

$$M(T_1; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com

$$T_1(x, y, z) = M(T_1; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (2x + z, x + y).$$

Tem-se $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com

$$T_2(x, y) = M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^3) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (y, y, x + y).$$

Logo, tem-se $T_1 \circ T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linear com

$$\begin{aligned} (T_1 \circ T_2)(x, y) &= M(T_1; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^3) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x + 3y, 2y) \end{aligned}$$

e $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linear com

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(x, y, z) &= M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^3) M(T_1; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (x + y, x + y, 3x + y + z). \end{aligned}$$

Resolução alternativa: Tendo-se $T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $T_1(x, y, z) = (2x + z, x + y)$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $T_2(x, y) = (y, y, x + y)$, então $T_1 \circ T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é linear com

$$(T_1 \circ T_2)(x, y) = T_1(T_2(x, y)) = T_1(y, y, x + y) = (x + 3y, 2y)$$

e $T_2 \circ T_1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é linear com

$$(T_2 \circ T_1)(x, y, z) = T_2(T_1(x, y, z)) = T_2(2x + z, x + y) = (x + y, x + y, 3x + y + z).$$

3. Considere a base ordenada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, em que $v_1 = (1, 1)$ e $v_2 = (1, 0)$ e seja $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a transformação linear tal que

$$T(v_1) = (1, -2), \quad T(v_2) = (-3, 1).$$

(i) Tem-se $T(2, 1) = T((1, 1) + (1, 0)) \underbrace{=}_{T \text{ é linear}} T(1, 1) + T(1, 0) = (1, -2) + (-3, 1) = (-2, -1)$.

(ii) Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Tem-se

$$(x, y) = y(1, 1) + (x - y)(1, 0).$$

Logo,

$$\begin{aligned} T(x, y) &= T(y(1, 1) + (x - y)(1, 0)) \underbrace{=}_{T \text{ é linear}} yT(1, 1) + (x - y)T(1, 0) = \\ &= y(1, -2) + (x - y)(-3, 1) = (-3x + 4y, x - 3y). \end{aligned}$$

(iii) Tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},$$

uma vez que, pela alínea (ii), $T(1, 0) = (-3, 1)$ e $T(0, 1) = (4, -3)$.

Observação: Poderíamos ter calculado $T(1, 0)$ e $T(0, 1)$ sem recorrer à alínea (ii), uma vez que

$$(1, 0) = 0(1, 1) + (1, 0) \text{ e } (0, 1) = (1, 1) - (1, 0).$$

Logo, sendo T linear, tem-se (usando só o enunciado)

$$T(1, 0) = (-3, 1) \text{ e } T(0, 1) = T(1, 1) - T(1, 0) = (1, -2) - (-3, 1) = (4, -3).$$

(iv) Tem-se

$$S_{\mathcal{B}_c^2 \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

uma vez que

$$(1, 0) = 0(1, 1) + (1, 0) \text{ e } (0, 1) = (1, 1) - (1, 0).$$

Tem-se

$$S_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_c^2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

uma vez que

$$(1, 1) = (1, 0) + (0, 1) \text{ e } (1, 0) = (1, 0) + 0(0, 1).$$

As coordenadas do vector $(2, 1)$ na base $\mathcal{B}$ são dadas por:

$$S_{\mathcal{B}_c^2 \rightarrow \mathcal{B}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Observação 1: Na verdade poderíamos ter determinado as coordenadas do vector $(2, 1)$ na base $\mathcal{B}$ usando a definição de coordenadas de um vector numa base:

$$(2, 1) = (1, 1) + (1, 0).$$

Logo, as coordenadas do vector $(2, 1)$ na base $\mathcal{B}$ são precisamente 1 e 1.

Observação 2: Tem-se

$$S_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_c^2} = (S_{\mathcal{B}_c^2 \rightarrow \mathcal{B}})^{-1} \quad \text{e} \quad S_{\mathcal{B}_c^2 \rightarrow \mathcal{B}} = (S_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_c^2})^{-1}.$$

(v) Determinemos a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ usando só a definição de matriz que representa uma transformação linear em relação a uma base ordenada $\mathcal{B}$ no espaço de partida e no espaço de chegada. Tem-se

$$M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1, 1) = (1, -2) = -2(1, 1) + 3(1, 0) \quad \text{e} \quad T(1, 0) = (-3, 1) = (1, 1) - 4(1, 0).$$

Determinemos agora as coordenadas do vector $T(2, 1)$ na base $\mathcal{B}$ sem usar as alíneas anteriores. Tem-se

$$\begin{aligned} T(2, 1) &= T((1, 1) + (1, 0)) \underbrace{=}_{T \text{ é linear}} T(1, 1) + T(1, 0) = \\ &= (1, -2) + (-3, 1) = (-2, -1) = -(1, 1) - (1, 0). \end{aligned}$$

Logo, as coordenadas do vector $T(2, 1)$ na base $\mathcal{B}$ são -1 e -1 .

Resolução alternativa: Determinemos a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})$ e as coordenadas do vector $T(2, 1)$ na base $\mathcal{B}$ usando as alíneas anteriores. Tem-se

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_c^2) & \xrightarrow[T]{M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_c^2) \\ S_{\mathcal{B}_c^2 \rightarrow \mathcal{B}} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^2 \rightarrow \mathcal{B}} \\ (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) & \xrightarrow[M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})]{T} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \end{array}$$

Logo,

$$\begin{aligned} M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}) &= S_{\mathcal{B}_c^2 \rightarrow \mathcal{B}} M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) (S_{\mathcal{B}_c^2 \rightarrow \mathcal{B}})^{-1} = S_{\mathcal{B}_c^2 \rightarrow \mathcal{B}} M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) S_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_c^2} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Além disso tem-se

$$\begin{array}{ccc} \text{coordenadas de } (2, 1) & \xrightarrow[T]{M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)} & \text{coordenadas de } T(2, 1) \\ \text{na base } \mathcal{B}_c^2 & & \text{na base } \mathcal{B}_c^2 \\ \\ S_{\mathcal{B}_c^2 \rightarrow \mathcal{B}} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^2 \rightarrow \mathcal{B}} \\ \\ \text{coordenadas de } (2, 1) & \xrightarrow[M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})]{T} & \text{coordenadas de } T(2, 1) \\ \text{na base } \mathcal{B} & & \text{na base } \mathcal{B}. \end{array}$$

Logo, sendo 2 e 1 as coordenadas do vector $(2, 1)$ na base $\mathcal{B}_c^2$ então as coordenadas do vector $T(2, 1)$ na base $\mathcal{B}$ são dadas por

$$M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})S_{\mathcal{B}_c^2 \rightarrow \mathcal{B}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(vi) Determinemos a matriz $M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B})$ usando só a definição de matriz que representa uma transformação linear em relação às bases ordenadas no espaço de partida e no espaço de chegada. Tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1, 0) = (-3, 1) = (1, 1) - 4(1, 0)$$

e

$$\begin{aligned} T(0, 1) &= T((1, 1) - (1, 0)) = T(1, 1) - T(1, 0) = \\ &= (1, -2) - (-3, 1) = (4, -3) = -3(1, 1) + 7(1, 0). \end{aligned}$$

Resolução alternativa: Tendo em conta o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_c^2) & \xrightarrow[M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)]{M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_c^2) \\ S_{\mathcal{B}_c^2 \rightarrow \mathcal{B}} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B}_c^2 \rightarrow \mathcal{B}} \\ (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) & \xrightarrow[M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})]{T} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \end{array}$$

tem-se

$$M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}) = M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})S_{\mathcal{B}_c^2 \rightarrow \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}.$$

(vii) Determinemos a matriz $M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}_c^2)$ usando só a definição de matriz que representa uma transformação linear em relação às bases ordenadas no espaço de partida e no espaço de chegada. Tem-se

$$M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix},$$

uma vez que

$$T(1, 1) = (1, -2) = (1, 0) - 2(0, 1)$$

e

$$T(1, 0) = (-3, 1) = -3(1, 0) + (0, 1).$$

Resolução alternativa: Tendo em conta o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) & \xrightarrow[M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})]{M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B})} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}) \\ S_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_c^2} \downarrow I & & I \downarrow S_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_c^2} \\ (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_c^2) & \xrightarrow[M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)]{T} & (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_c^2) \end{array}$$

tem-se

$$M(T; \mathcal{B}; \mathcal{B}_c^2) = M(T; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) S_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}_c^2} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. Tem-se

$$\begin{aligned} 1 + t + t^2 &= (-1)(-1 + t^2) + (-1)(-t - t^2) + (-1)(-t^2) = \\ &= (-1)T_2(1, -2, 0) + (-1)T_2(-1, 0, 1) + (-1)T_2(0, 1, -1) = \\ &= T_2((-1)(1, -2, 0) + (-1)(-1, 0, 1) + (-1)(0, 1, -1)) = T_2(0, 1, 0). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(1, 0, 0) &= T_2(-(1, -2, 0) - 2(-1, 0, 1) - 2(0, 1, -1)) = \\ &= -T_2(1, -2, 0) - 2T_2(-1, 0, 1) - 2T_2(0, 1, -1) = \\ &= -(-1 + t^2) - 2(-t - t^2) - 2(-t^2) = 1 + 2t + 3t^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_2(0, 0, 1) &= T_2(-(1, -2, 0) - (-1, 0, 1) - 2(0, 1, -1)) = \\ &= -T_2(1, -2, 0) - T_2(-1, 0, 1) - 2T_2(0, 1, -1) = \\ &= -(-1 + t^2) - (-t - t^2) - 2(-t^2) = 1 + t + 2t^2 \end{aligned}$$

logo, a matriz da transformação linear T_2 relativamente às bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathcal{P}_2$ respectivamente é dada por: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ e assim, tem-se

$$\begin{aligned} T_2(x, y, z) &= (1 + 2t + 3t^2)x + (1 + t + t^2)y + (1 + t + 2t^2)z = \\ &= x + y + z + (2x + y + z)t + (3x + y + 2z)t^2. \end{aligned}$$

Logo a expressão geral de $T_1 \circ T_2$ é dada por:

$$\begin{aligned} (T_1 \circ T_2)(x, y, z) &= T_1(T_2(x, y, z)) = \\ &= T_1(x + y + z + (2x + y + z)t + (3x + y + 2z)t^2) = \\ &= \begin{bmatrix} x + y + z & 6x + 3y + 4z \\ 2x + y + 2z & x + y + z \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5. 25. Considere as transformações lineares $T_1, T_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas respectivamente por

$$T_1(x, y) = (x + y, x - y) \quad \text{e} \quad T_2(x, y) = (2x + y, x - 2y).$$

(i) Tem-se

$$M(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$M(T_2; \mathcal{B}_c^2, \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

uma vez que $T_1(1, 0) = (1, 1)$, $T_1(0, 1) = (1, -1)$, $T_2(1, 0) = (2, 1)$ e $T_2(0, 1) = (1, -2)$.

(ii) A matriz $M(T_2 \circ T_1; \mathcal{B}_c^2, \mathcal{B}_c^2)$ que representa $T_2 \circ T_1$ em relação à base canónica (ordenada) $\mathcal{B}_c^2$ de $\mathbb{R}^2$, é dada por

$$\begin{aligned} M(T_2 \circ T_1; \mathcal{B}_c^2, \mathcal{B}_c^2) &= M(T_2; \mathcal{B}_c^2, \mathcal{B}_c^2)M(T_1; \mathcal{B}_c^2, \mathcal{B}_c^2) = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(iii) Tem-se, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(x, y) &= M(T_2 \circ T_1; \mathcal{B}_c^2, \mathcal{B}_c^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (3x + y, -x + 3y). \end{aligned}$$

(iv) Tem-se, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} T_1(x, y) &= M(T_1; \mathcal{B}_c^2, \mathcal{B}_c^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (x + y, x - y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T_2(x, y) &= M(T_2; \mathcal{B}_c^2, \mathcal{B}_c^2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (2x + y, x - 2y). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (T_2 \circ T_1)(x, y) &= T_2(T_1(x, y)) = T_2(x + y, x - y) = \\ &= (2x + 2y + x - y, x + y - 2x + 2y) = (3x + y, -x + 3y). \end{aligned}$$

(v) Tem-se

$$\mathcal{N}(T_1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x + y, x - y) = (0, 0)\} = \{(0, 0)\}$$

e

$$\mathcal{N}(T_2) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T(x, y) = (0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (2x + y, x - 2y) = (0, 0)\} = \{(0, 0)\}.$$

Logo, T_1 e T_2 são injectivas e como tal são invertíveis.

(vi) Tem-se então

$$(M(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2))^{-1} = M(T_1^{-1}; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) \quad \text{e} \quad (M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2))^{-1} = M(T_2^{-1}; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)$$

Determinemos $(M(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2))^{-1}$ e $(M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2))^{-1}$.

$$\begin{aligned} [M(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) \mid I] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array} \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) \mid I] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5/2 & -1/2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \\ &\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 4/5 & 2/5 \\ 0 & -5/2 & -1/2 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & -2/5 \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Logo,

$$(M(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2))^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2))^{-1} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix}$$

e como tal, para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$T_1^{-1}(x, y) = (M(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2))^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \right),$$

$$T_2^{-1}(x, y) = (M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2))^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y, \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y \right),$$

e finalmente

$$\begin{aligned} (T_1^{-1} \circ T_2^{-1})(x, y) &= T_1^{-1}(T_2^{-1}(x, y)) = \\ &= T_1^{-1}\left(\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y, \frac{1}{5}x - \frac{2}{5}y\right) = \\ &= \left(\frac{3}{10}x - \frac{1}{10}y, \frac{1}{10}x + \frac{3}{10}y\right). \end{aligned}$$

(vii) Tem-se

$$\begin{aligned} M((T_2 \circ T_1)^{-1}; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) &= M(T_1^{-1} \circ T_2^{-1}; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = M(T_1^{-1}; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2)M(T_2^{-1}; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \\ &= (M(T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2))^{-1} (M(T_2; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2))^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/10 & -1/10 \\ 1/10 & 3/10 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

De facto,

$$M((T_2 \circ T_1)^{-1}; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 3/10 & -1/10 \\ 1/10 & 3/10 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} = (M(T_2 \circ T_1; \mathcal{B}_c^2; \mathcal{B}_c^2))^{-1}.$$

(viii) Tendo em conta (vii) tem-se

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(x, y) = \begin{bmatrix} 3/10 & -1/10 \\ 1/10 & 3/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left(\frac{3}{10}x - \frac{1}{10}y, \frac{1}{10}x + \frac{3}{10}y \right).$$

Logo, como seria de esperar,

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(x, y) = (T_1^{-1} \circ T_2^{-1})(x, y).$$

6. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e a base canónica (ordenada)

$$\mathcal{B}_c^3 = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ de } \mathbb{R}^3, \text{ com } v_1 = (1, 0, 0), \quad v_2 = (0, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1).$$

Suponha que se tem

$$T(v_3) = 3v_1 + v_2 - 2v_3, \quad T(v_2 + v_3) = v_1 \quad \text{e} \quad T(v_1 + v_2 + v_3) = v_2 + v_3.$$

Logo,

$$T(0, 0, 1) = T(v_3) = (3, 1, -2),$$

$$T(0, 1, 0) = T(v_2) = T(v_2 + v_3) - T(v_3) = -2v_1 - v_2 + 2v_3 = (-2, -1, 2)$$

e

$$T(1, 0, 0) = T(v_1) = T(v_1 + v_2 + v_3) - T(v_2 + v_3) = -v_1 + v_2 + v_3 = (-1, 1, 1).$$

Assim:

(i)

$$\begin{aligned} T(2v_1 - v_2 + 3v_3) &= 2T(v_1) - T(v_2) + 3T(v_3) = \\ &= 2(-1, 1, 1) - (-2, -1, 2) + 3(3, 1, -2) = (9, 6, -6); \end{aligned}$$

(ii)

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

(iii) Seja $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_c^3$ a base canónica ordenada de $\mathbb{R}^3$. Determinemos uma base ordenada $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ de modo a que a matriz $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$ que represente T em relação a essas bases $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ seja a matriz identidade:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tem-se $T(1, 0, 0) = w_1$, $T(0, 1, 0) = w_2$ e $T(0, 0, 1) = w_3$. Logo,

$$\mathcal{B}_2 = \{(-1, 1, 1), (-2, -1, 2), (3, 1, -2)\}.$$

7. $V = L\left(\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right)$ e $T : \mathcal{P}_1 \rightarrow V$ é uma transformação linear tal que

$$M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$$

com

$$\mathcal{B}_1 = \{1 + t, 1 - t\} \quad \text{e} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}.$$

Tem-se

$$V = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) : a - d = 0 \quad \text{e} \quad a - b - c = 0\right\}.$$

(i) Seja $a_0 + a_1 t \in \mathcal{P}_1$. Tem-se $a_0 + a_1 t = \frac{1}{2}(a_0 + a_1)(1 + t) + \frac{1}{2}(a_0 - a_1)(1 - t)$ e como $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}$ então

$$\begin{aligned} T(a_0 + a_1 t) &= T\left(\frac{1}{2}(a_0 + a_1)(1 + t) + \frac{1}{2}(a_0 - a_1)(1 - t)\right) = \\ &= \frac{1}{2}(a_0 + a_1)T(1 + t) + \frac{1}{2}(a_0 - a_1)T(1 - t) = \\ &= \frac{1}{2}(a_0 + a_1)\left(7\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + \frac{1}{2}(a_0 - a_1)\left(-1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 1\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \begin{bmatrix} 7a_0 + 9a_1 & 4a_0 + 5a_1 \\ 3a_0 + 4a_1 & 7a_0 + 9a_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(ii) $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2)$ é do tipo 2×2 e $\det M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_2) = 2$ logo T é invertível, T^{-1} é linear e

$$M(T^{-1}; \mathcal{B}_2; \mathcal{B}_1) = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}.$$

Seja $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in V$. Tem-se

$$\begin{bmatrix} b + c & b \\ c & b + c \end{bmatrix} = b\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + c\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

e

$$\begin{aligned} T^{-1}\left(\begin{bmatrix} b + c & b \\ c & b + c \end{bmatrix}\right) &= bT^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + cT^{-1}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \\ &= b\left(\frac{1}{2}(1 + t) + \frac{7}{2}(1 - t)\right) + c\left(-\frac{1}{2}(1 + t) - \frac{9}{2}(1 - t)\right) = \\ &= 4b - 5c + (-3b + 4c)t. \end{aligned}$$