Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 2^o semestre 2017/2018

Resolução da 5^a ficha de exercícios

1. Como 1 e 2 são as coordenadas de $(1,1)$ em $\mathcal{B}_1$ pois $(1,1) = 1(1,-1) + 2(0,1)$, e sendo

$$S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então as coordenadas de $(1,1)$ em $\mathcal{B}_2$ são -1 e 2 uma vez que

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2. $S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 7 \end{bmatrix} \Leftrightarrow S_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$

3. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$, onde

$$w_1 = t, \quad w_2 = 1 - t.$$

Seja $S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. Determinemos $\mathcal{B}_1$.

Uma vez que $S_{\mathcal{B}_2\to\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, então $w_1 = 2v_1 - v_2$ e $w_2 = 3v_1 + 2v_2$. Isto é, tem-se o sistema

$$\begin{cases} 2v_1 - v_2 = t \\ \\ 3v_1 + 2v_2 = 1 - t, \end{cases}$$

cuja matriz aumentada é dada por $\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & t \\ 3 & 2 & 1-t \end{array}\right]$. Pelo método de eliminação de Gauss:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & t \\ 3 & 2 & 1-t \end{array}\right] \underset{-\frac{3}{2}L_1+L_2\to L_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & t \\ 0 & \frac{7}{2} & 1-\frac{5}{2}t \end{array}\right].$$

Logo, $v_2 = \frac{2}{7} - \frac{5}{7}t$ e $v_1 = \frac{1}{2}(v_2 + t) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}t$. Logo, $\mathcal{B}_1 = \left\{\frac{1}{7} + \frac{1}{7}t, \frac{2}{7} - \frac{5}{7}t\right\}$.

4. Sejam $\mathcal{B}_1 = \{1, 1-t, t^2\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_2$.

(i) Sejam $1, 2$ e 3 as coordenadas de um vector $p(t) \in \mathcal{P}_2$ em relação à base $\mathcal{B}_2$. Determinemos as coordenadas do mesmo vector $p(t)$ em relação à base $\mathcal{B}_1$.

Tem-se

$$p(t) = 1 + 2(1+t) + 3\left(1+t+t^2\right) = 6 + 5t + 3t^2 = \alpha 1 + \beta(1-t) + \gamma t^2.$$

É fácil ver que $\alpha = 11,\ \ \beta = -5$ e $\gamma = 3$.

Resolução alternativa: Tem-se $S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, uma vez que

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + 0\,(1-t) + 0t^2, \\ 1+t &= 2 - (1-t) + 0t^2 \ \text{ e} \\ 1+t+t^2 &= 2 - (1-t) + t^2. \end{aligned}$$

Logo, as coordenadas de $p(t)$ em relação à base $\mathcal{B}_1$ são dadas por:

$$S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ -5 \\ 3 \end{bmatrix},$$

onde $1, 2$ e 3 são as coordenadas de $p(t)$ em relação à base $\mathcal{B}_2$.

(ii) Determinemos a matriz $S_{B_1 \to B_2}$.
Como

$$1 = 1 \times 1 + 0\,(1+t) + 0\,(1+t+t^2)$$

$$1 - t = 2 \times 1 - (1+t) + 0\,(1+t+t^2)$$

$$t^2 = 0 \times 1 - (1+t) + (1+t+t^2)$$

então $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Além disso, bastaria ver que

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = (S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1})^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Logo, como $2 - t + t^2 = 1 + (1-t) + t^2$, as coordenadas do vector $2 - t + t^2$ na base B_2 são dadas por

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

ou seja $2 - t + t^2 = 3 - 2\,(1+t) + (1+t+t^2)$.

5. $S_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = (S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2})^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ e como $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ é o 2^o vector de $\mathcal{B}_2$, então as coordenadas de $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ em $\mathcal{B}_1$ são dadas por:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

isto é, são: -1 e -2.