

Resolução da 12ª ficha de exercícios

1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$

$$\det(A - \lambda I) = \det \left(\begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} \right) = -(\lambda - 3)(\lambda - 1)^2.$$

Tem-se

$$\dim \mathcal{N}(A - 3I) = m_g(3) \underset{A \text{ é simétrica}}{=} m_a(3) = 1$$

$$\dim \mathcal{N}(A - 1I) = m_g(1) \underset{A \text{ é simétrica}}{=} m_a(1) = 2.$$

2.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2 - \lambda \end{bmatrix} = -(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 3),$$

pelo que $\{1, 2, 3\}$ é o conjunto dos valores próprios de A com

$$m_a(1) = m_a(2) = m_a(3) = 1.$$

Sendo a matriz simétrica, os vectores próprios correspondentes a valores próprios distintos serão ortogonais. Como

$$\mathcal{N}(A - 1I) = \mathcal{N} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L(\{(-1, 0, 1)\}),$$

$$\mathcal{N}(A - 2I) = \mathcal{N} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L(\{(0, 1, 0)\})$$

e

$$\mathcal{N}(A - 3I) = \mathcal{N} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L(\{(1, 0, 1)\})$$

então

$$\left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{-\sqrt{2}}{2} \right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right), (0, 1, 0) \right\}$$

é uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A .

3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Como A não é simétrica, não é possível encontrar uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A .

4. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ não sendo simétrica não é ortogonalmente diagonalizável. No entanto, como

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

então $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é normal e como tal é unitariamente diagonalizável.

5. Como A é simétrica e como 1 e -1 são os únicos valores próprios de A , uma vez que $m_g(1) = 2$, então

$$\mathcal{N}(A + I) = (\mathcal{N}(A - I))^\perp = \mathcal{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = L(\{(1, -1, 0)\}).$$

Logo, aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt à base $\{(1, 1, 1), (2, 2, 1)\}$ do espaço próprio $\mathcal{N}(A - I)$, obtem-se uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A :

$$\begin{aligned} \left\{ (1, -1, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 1) - \text{proj}_{(1,1,1)}(2, 2, 1) \right\} &= \left\{ (1, -1, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 1) - \frac{5}{3}(1, 1, 1) \right\} = \\ &= \left\{ (1, -1, 0), (1, 1, 1), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3} \right) \right\} \quad \text{ou ainda: } \{(1, -1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, -2)\}. \end{aligned}$$

Logo

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}}_{P^T} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_D \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}}_P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 2 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 5).$$

Logo os valores próprios de A são: $0, 1$ e 5 . Como A é simétrica, então A é ortogonalmente diagonalizável. Assim, uma vez que

$$\mathcal{N}(A) = L(\{(0, -2, 1)\}), \quad \mathcal{N}(A - I) = L(\{(1, 0, 0)\}) \quad \text{e} \quad \mathcal{N}(A - 5I) = L(\{(0, 1, 2)\})$$

tem-se uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A :

$$\{(0, -2, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 2)\}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} A &= \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}}_{P^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}}_{\sqrt{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}}_P \right)^2 = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{5} \end{bmatrix}$$

é a matriz de valores próprios não negativos tal que $B^2 = A$.

7. Se A (real) for ortogonal então $\det A = 1$ ou $\det A = -1$.

Sendo A ortogonal, tem-se

$$A^T A = A A^T = I$$

pelo que

$$\begin{aligned} (\det A)^2 &= \det A \det A = \det A^T \det A = \det (A^T A) = \det I = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\det A = 1 \quad \text{ou} \quad \det A = -1). \end{aligned}$$

Sendo A unitária, tem-se

$$A^H A = A A^H = I$$

pelo que

$$\begin{aligned} |\det A|^2 &= \overline{\det A} \det A = \det A^H \det A = \det (A^H A) = \det I = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow |\det A| = 1. \end{aligned}$$