Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 2^o semestre 2017/2018

Resolução da 1^a ficha de exercícios

1. As equações das alíneas **a)** e **b)** são lineares.

2. O ponto $(1,-1)$ é a solução desse sistema de equações lineares.

3. Os pontos: $(1,-1,1,0),(1,-1,1,2),\left(3,-9,7,\dfrac{\sqrt[3]{\pi}}{2}\right)$ são soluções desse sistema de equações lineares.

4. $p(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$ com $a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}$.
$p(1)=0 \Leftrightarrow a_0+a_1+a_2=0$
$p(0)=1 \Leftrightarrow a_0=1$
$p(-1)=1 \Leftrightarrow a_0-a_1+a_2=1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{-L_1+L_2\to L_2 \\ -L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2+L_3\to L_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

$a_0=1, \quad a_1=a_2=-\dfrac{1}{2}$

Logo $p(t)=1-\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{2}t^2$

5. $$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 5 & 2 \\ -3 & 6 & -9 & 3 & -6 \end{array}\right] \underset{\substack{-3L_1+L_2\to L_2 \\ 3L_1+L_3\to L_3}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -7 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right].$$

Logo, o sistema não tem solução (é impossível). $CS=\varnothing$.

6. $$[A\mid B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\alpha & 0 & -1 \\ \alpha & 1 & \alpha & -1 \\ 0 & 0 & \alpha & -\alpha \end{array}\right] \underset{-\alpha L_1+L_2\to L_2}{\rightarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\alpha & 0 & -1 \\ 0 & 1+\alpha^2 & \alpha & -1+\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & -\alpha \end{array}\right].$$

O sistema é possível se e só se $\operatorname{car} A=\operatorname{car}[A\mid B]$ se e só se $\alpha\in\mathbb{R}$. Se $\alpha=0$ então a solução geral é: $\{(-1,-1,z):z\in\mathbb{R}\}$.

7. Sejam $x=2t-3s$, $y=t+s-1$, $z=2s+1$ e $w=t-1$. Logo $t=w+1$ e $s=\dfrac{z-1}{2}$. Assim:

$$\begin{cases} x=2(w+1)-3\dfrac{z-1}{2} \\ \\ y=w+1+\dfrac{z-1}{2}-1. \end{cases}$$

Deste modo, obtém-se o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x+3z-4w=7 \\ \\ 2y-z-2w=-1. \end{cases}$$

Resolução alternativa: Sejam $(x,y,z,w)\in\{(2t-3s,t+s-1,2s+1,t-1):s,t\in\mathbb{R}\}$. Então existem $s,t\in\mathbb{R}$ para os quais:

$$(x,y,z,w)=(2t-3s,t+s-1,2s+1,t-1)$$

isto é

$$(x,y+1,z-1,w+1)=s(-3,1,2,0)+t(2,1,0,1)$$

o que equivale a ter-se $\operatorname{car} A=\operatorname{car}[A\mid B]$ (sistema possível), com

$$[A\mid B]=\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 2 & x \\ 1 & 1 & y+1 \\ 2 & 0 & z-1 \\ 0 & 1 & w+1 \end{array}\right]\underset{\substack{L_1\leftrightarrow L_3\\ L_2\leftrightarrow L_4}}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & z-1 \\ 0 & 1 & w+1 \\ -3 & 2 & x \\ 1 & 1 & y+1 \end{array}\right]\underset{\substack{\frac{3}{2}L_1+L_3\to L_3\\ -\frac{1}{2}L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}$$

$$\underset{\substack{\frac{3}{2}L_1+L_3\to L_3\\ -\frac{1}{2}L_1+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & z-1 \\ 0 & 1 & w+1 \\ 0 & 2 & x+\frac{3}{2}z-\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & y-\frac{1}{2}z+\frac{3}{2} \end{array}\right]\underset{\substack{-2L_2+L_3\to L_3\\ -L_2+L_4\to L_4}}{\longrightarrow}\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & z-1 \\ 0 & 1 & w+1 \\ 0 & 0 & x+\frac{3}{2}z-2w-\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & y-\frac{1}{2}z-w+\frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Ou seja, de modo a ter-se $\operatorname{car} A=\operatorname{car}[A\mid B]$, então (x,y,z,w) deverá satisfazer o sistema:

$$\begin{cases} x+\dfrac{3}{2}z-2w=\dfrac{7}{2} \\ \\ y-\dfrac{1}{2}z-w=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$