Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - $2^o$ semestre 2017/2018

**$8^a$ ficha de exercícios para as aulas práticas**

1. Calcule os seguintes determinantes e diga se são invertíveis as respectivas matrizes:

**(i)** $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}$ **(ii)** $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & \pi & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 9 & \sqrt{3} \end{vmatrix}$

2. Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$.

   **a)** Diga, justificando, quais são os valores de $\alpha$ para os quais $A_\alpha$ é invertível.

   **b)** Seja $n \in \mathbb{N}$. Calcule $\det\left((A_0)^n + (A_0)^{n+2}\right)$.

   **c)** Considerando os valores de $\alpha$ para os quais $A_\alpha$ é invertível, calcule a entrada $(3,1)$ da matriz inversa de $A_\alpha$.

3. Sejam $A$ uma matriz invertível e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule, justificando, $\det\left(2B^TABA^{-1} - 3B^T\right)$.

4. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & 0 & c \\ d & e & 0 & f \\ g & h & 0 & i \\ x & y & -1 & z \end{vmatrix} = 5$ calcule $\begin{vmatrix} 2i & 2h & 2g \\ f-3c & e-3b & d-3a \\ c & b & a \end{vmatrix}$.

5. Sejam $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 9 & -8 & -1 \\ -7 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Verifique que $C$ e $D$ são invertíveis e calcule:

$$\det\left(-2C^T\left(\left(-\frac{2}{3}D^3\right)^{-1}\right)\left(\left(D^T\right)^{-1}C\right)^{-1}\right)$$

6. Sem calcular o determinante, diga qual o coeficiente de $x^3$ na expressão $\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 9 & 8 & 7 & x \end{vmatrix}$.

7. Sabendo que $533, 715$ e $871$ são múltiplos de 13, justifique que $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 5 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ é também múltiplo de 13, sem calcular o determinante.

8. Seja $A = (a_{ij})_{n\times n}$ com $n$ ímpar e tal que $a_{ij} + a_{ji} = 0$, para todos os $i, j = 1, ..., n$. Mostre que $A$ não é invertível. Isto é, toda a matriz anti-simétrica de ordem ímpar não é invertível.