Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 2^o semestre 2017/2018

3^a ficha de exercícios para as aulas práticas

1. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$. Escreva cada um dos seguintes conjuntos na forma $\mathcal{N}(A)$, explicitando a matriz A. Explique porque são esses conjuntos subespaços de $\mathbb{R}^3$ e indique possíveis conjuntos geradores para cada um deles.

   (i) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$

   (ii) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z=0 \text{ e } x-y-z=0\}$

2. Seja $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ o espaço linear de todas as matrizes do tipo $m \times n$ com entradas reais. Explique porque é o seguinte conjunto um subespaço de $\mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$ e indique um possível conjunto gerador.

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R}) : a = -2c \text{ e } f = 2e + d \right\}.$$

3. Considere, no espaço linear $\mathbb{R}^4$, os vectores $v_1 = (1,0,0,1)$, $v_2 = (1,-1,0,0)$ e $v_3 = (0,1,2,1)$. Diga quais dos seguintes vectores pertencem ao subespaço $L(\{v_1, v_2, v_3\})$:

$$(-1,4,2,2), \qquad (2,0,2,2), \qquad (1,1,-2,2), \qquad (0,1,1,0).$$

4. Determine os vectores (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ que pertencem a $L(\{u,v,w\})$ onde

$$u = (2,1,0), \quad v = (1,-1,2) \quad \text{e} \quad w = (0,3,-4).$$

5. Seja U o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado por $\{(1,1,0,-1),(1,1,0,1)\}$. Seja

$$CS = \{(1,0,0,2)\} + U$$

   a) Encontre uma matriz 2×4 cujo núcleo seja igual a U.

   b) Determine um sistema de duas equações lineares cujo conjunto solução seja CS.

6. Considere os seguintes subespaços U e V de $\mathcal{P}_2$:

$$U = \{p(t) \in \mathcal{P}_2 : \ p(-1) = 2p(0) - p(1)\}, \qquad V = L(\{-1+t, 1-t^2\}).$$

   a) Determine $u_1, u_2, u_3, v \in \mathcal{P}_2$ tais que

$$U + V = L(\{u_1,u_2,u_3\}) \quad \text{e} \quad U \cap V = L(\{v\}).$$

   b) Determine um subespaço W de $\mathcal{P}_2$ tal que $\mathcal{P}_2 = V \oplus W$.

7. Determine conjuntos geradores para o espaço das colunas, o espaço das linhas e o núcleo das seguintes matrizes, indicando em cada caso o menor número possível de vectores geradores de cada um deles.

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(ii)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(iii)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(iv)** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ **(vi)** $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ **(vii)** $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ **(viii)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

8. Seja V um espaço linear real e $\mathbf{0}$ o seu vector nulo. Mostre que:

(i) Se $u + v = u + w$, então $v = w$.

(ii) Mostre que o vector nulo $\mathbf{0} \in V$ é único.

(iii) $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ para todo o escalar $\lambda \in \mathbb{R}$.

(iv) $0u = \mathbf{0}$ para todo o vector $u \in \mathbf{V}$.

(v) $-(-u) = u$ para todo o $u \in \mathbf{V}$.

(vi) Mostre que o simétrico $-u$ de um qualquer vector u de V é único.

(vii) $(-1)u = -u$ para todo o $u \in \mathbf{V}$.

(viii) Se $\lambda u = \mathbf{0}$, então $\lambda = 0$ ou $u = \mathbf{0}$.

(ix) Se $u \neq \mathbf{0}$ e $\alpha u = \beta u$, então $\alpha = \beta$.

9. Sejam $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que $\mathcal{C}(A+B) \subset \mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(B)$.

10. Seja $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$. Mostre que $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{L}(A) = \{\mathbf{0}\}$.

11. Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = A$. Mostre que $\mathcal{N}(A) \cap \mathcal{C}(A) = \{\mathbf{0}\}$.