Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 2^o semestre 2017/2018

12^a ficha de exercícios para as aulas práticas

1. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
Calcule as dimensões dos espaços próprios de A sem os determinar.

2. Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
Determine uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A.

3. Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Diga se é possível encontrar uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A. Caso seja possível, determine essa base.

4. Considere o produto interno usual. Justifique a seguinte afirmação. A matriz
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
não é ortogonalmente diagonalizável, no entanto, é unitariamente diagonalizável.

5. Considere o produto interno usual. Determine uma matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ cujos valores próprios sejam 1 e -1, e tal que $\mathcal{N}(A - I) = L(\{(1,1,1), (2,2,1)\})$.

6. Considere o produto interno usual. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$
Determine a matriz B de valores próprios não negativos tal que $B^2 = A$.

7. Mostre que se uma matriz fôr ortogonal então o seu determinante ou é 1 ou é -1. E se a matriz fôr unitária?