Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1^o Semestre 2016/2017
LEIC-A

8^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas

1. Sejam $B_1 = \{(1,2),(0,1)\}$ e $B_2 = \{(1,1),(2,3)\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Seja $v = (1,5)$.

   (i) Determine as coordenadas de v em relação à base B_1.

   (ii) Determine a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2.

   (iii) Determine as coordenadas de v em relação à base B_2, usando as alíneas anteriores.

   (iv) Determine, directamente, as coordenadas de v em relação à base B_2.

   (v) Determine a matriz $S_{B_2 \to B_1}$ de mudança da base B_2 para a base B_1.

   (vi) Determine as coordenadas de v em relação à base B_1, usando a alínea anterior, e compare com o resultado obtido em **(i).**

2. Considere em $\mathbb{R}^2$ as bases ordenadas $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ em que $\mathcal{B}_1 = \{(1,-1),(0,1)\}$. Seja

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}_2$. Determine as coordenadas do vector $(1,1)$ em $\mathcal{B}_2$.

3. Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Sejam $(1,2)$ e $(5,11)$ as coordenadas de um vector u em $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ respectivamente. Sejam $(1,1)$ e $(3,7)$ as coordenadas de um vector v em $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ respectivamente. Determine a matriz $S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$ de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$.

4. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$, onde

$$v_1 = (1,2), \quad v_2 = (0,1).$$

   Suponha que a matriz $S_{B_2 \to B_1}$ de mudança da base B_2 para a base B_1, é dada por:

$$S_{B_2 \to B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Determine B_2.

5. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$, onde

$$w_1 = -1 + t, \quad w_2 = 1 + t.$$

   Suponha que a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2, é dada por:

$$S_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Determine B_1.

6. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$, onde

$$w_1 = t, \quad w_2 = 1 - t.$$

Suponha que a matriz $S_{B_2 \to B_1}$ de mudança da base B_2 para a base B_1, é dada por:

$$S_{B_2 \to B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine B_1.

7. Sejam $B_1 = \{1, 1-t, t^2\}$ e $B_2 = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_2$.

(i) Suponha que as coordenadas de um vector $p(t) \in \mathcal{P}_2$ em relação à base B_2 são dadas por $(1, 2, 3)$. Determine as coordenadas do mesmo vector $p(t)$ em relação à base B_1.

(ii) Determine a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2 e utilize-a para determinar as coordenadas do vector $2 - t + t^2$ na base B_2.

8. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ duas bases ordenadas de $\mathbb{R}^3$, onde

$$v_1 = (1, 0, 1), \quad v_2 = (1, 1, 0), \quad v_3 = (0, 0, 1).$$

Suponha que a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2, é dada por:

$$S_{B_1 \to B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine B_2.

9. Sejam

$$B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

e

$$B_2 = \left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

duas bases ordenadas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Determine a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2 e utilize-a para determinar as coordenadas do vector $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ em relação à base B_2.

10. Considere o espaço linear

$$U = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right\} \right).$$

Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ duas bases ordenadas de U, com

$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Considere ainda a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$ dada por:

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Determine as coordenadas do vector $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ em $\mathcal{B}_1$.

11. Seja $B = \{v_1, v_2\}$ uma base ordenada de $\mathcal{P}_1$. Sejam $(1,-1)$ e $(2,2)$ respectivamente as coordenadas de dois polinómios $1+t$ e $1-t$ em relação à base B. Determine B.

12. Sejam $B_1 = \{v_1, v_2\}$ e $B_2 = \{w_1, w_2\}$ duas bases ordenadas de $\mathcal{P}_1$. Suponha que $(1,-1)$ e $(2,2)$ são respectivamente as coordenadas de um polinómio $p(t)$ em relação às bases B_1 e B_2. Suponha ainda que $(1,1)$ e $(2,-2)$ são respectivamente as coordenadas de um polinómio $q(t)$ em relação às bases B_1 e B_2. Determine a matriz $S_{B_1 \to B_2}$ de mudança da base B_1 para a base B_2.

13. Seja $\mathcal{P}_2 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 : a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 2. Seja

$$\mathcal{B} = \{t - t^2, -2 + 2t\}$$

uma base ordenada de um subespaço U de $\mathcal{P}_2$.

a) Determine as coordenadas do vector $1 - t^2$ na base $\mathcal{B}$.

b) Determine a base ordenada $\mathcal{B}_1$ de U de tal modo que a matriz de mudança da base $\mathcal{B}_1$ para a base $\mathcal{B}$ seja dada por:

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

c) Sendo

$$V = L\left(\{-1 + t^2, -2 + t - t^2, 3 - t\}\right),$$

determine, justificando, uma base para $U \cap V$.

14. Considere o seguinte subespaço linear de $\mathcal{P}_2$:

$$V = L(\{1 - t, 1 - t^2\}).$$

Sejam $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ duas bases ordenadas de V, com

$$\mathcal{B}_1 = \{1 - t, 1 - t^2\}.$$

Considere ainda a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}_1$ para $\mathcal{B}_2$ dada por:

$$S_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Determine as coordenadas do vector $1 - t$ em $\mathcal{B}_2$.