

5^a Ficha de exercícios para as aulas de problemas

1. Classifique quanto à paridade as seguintes permutações de números de 1 a 6:

- (i) (312645) (ii) (234516) (iii) (654321) (iv) (123456)
(v) (546321) (vi) (453261) (vii) (634125) (viii) (123465)

2. Na expressão do determinante de uma matriz do tipo 6×6 diga qual o sinal que afecta cada uma das seguintes parcelas:

- (i) $a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$ (ii) $a_{16}a_{25}a_{34}a_{43}a_{52}a_{61}$
(iii) $a_{54}a_{45}a_{63}a_{32}a_{26}a_{11}$ (iv) $a_{16}a_{23}a_{34}a_{41}a_{62}a_{55}$

3. Verifique que

$$(i) \begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31} \quad (ii) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

(iii)

$$\det \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1\ 2} & \cdots & a_{n-1\ n} \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^{n \frac{n-1}{2}} a_{1n} \cdots a_{n-1\ 2} a_{n1}$$

4. Calcule os seguintes determinantes e diga quais são as matrizes invertíveis:

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} 18563 & 18573 \\ 21472 & 21482 \end{vmatrix}$ (iii) $\begin{vmatrix} 1 + \sqrt{2} & 2 - \sqrt{3} \\ 2 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{2} \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}$ (v) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (vi) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 5 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(vii) $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ (viii) $\begin{vmatrix} 8 & 12 & 8 \\ 5 & -1 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ (ix) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ (x) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

(xi) $\begin{vmatrix} -2 & -2 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ (xii) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ (xiii) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -23 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

(xiv) $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$ (xv) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ (xvi) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}$

$$\begin{array}{ccc}
\text{(xvii)} \begin{vmatrix} 7 & -4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -3 & 8 \\ 2 & -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} & \text{(xviii)} \begin{vmatrix} 9 & 0 & -6 & 4 & -2 \\ 5 & -3 & 0 & -1 & 2 \\ 8 & 0 & 4 & 1 & 1 \\ -6 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} & \text{(xix)} \begin{vmatrix} 7 & 4 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & \pi & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 9 & \sqrt{3} \end{vmatrix} \\
\text{(xx)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -7 & 3 & 0 & -2 \\ \pi & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 9 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \text{(xxi)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} & \text{(xxii)} \begin{vmatrix} n & n-1 & \vdots & 2 & 1 \\ n-1 & n-1 & \vdots & 2 & 1 \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}
\end{array}$$

5. (i) Verifique que a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ e & 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

não é invertível para quaisquer $a, b, c, d, e, f, g, h \in \mathbb{R}$.

(ii) Diga, para que valores de $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j \in \mathbb{R}$, é invertível a seguinte matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j & 0 \end{bmatrix}$$

6. Determine todos os valores do escalar λ para os quais a matriz $A - \lambda I$ é não invertível, onde A é dada por:

$$\begin{array}{cc}
\text{(i)} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} & \text{(ii)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix} \\
\text{(iii)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} & \text{(iv)} \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}
\end{array}$$

7. Indique três matrizes A do tipo 2×2 tais que $\text{tr } A = \pi = \det A$.

8. Seja

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & 0 & -1 \\ \alpha & -1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & \alpha & 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha \in \mathbb{R}$$

- a) Diga, justificando, quais são os valores de α para os quais A_α é invertível.
 b) Seja $n \in \mathbb{N}$. Calcule $\det((A_0)^n + (A_0)^{n+2})$.
 c) Considerando os valores de α para os quais A_α é invertível, calcule a entrada (3, 1) da matriz inversa de A_α .

9. Use a fórmula de inversão de matrizes para inverter:

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (iii) \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

10. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Justifique que A é invertível e calcule a entrada (2, 3) de A^{-1} .

11. Sejam A uma matriz invertível e

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcule, justificando,

$$\det(2B^T A B A^{-1} - 3B^T).$$

12. Determine a matriz A do tipo 2×2 tal que

$$I - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} A = A \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

13.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Diga, justificando, se a matriz:

$$A^T A + A \det A - 5A$$

é invertível.

14. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Calcule $\det[-2A^{-1}A^T \det(A^{-2})]$.

15. Calcule os valores de a para os quais $\det \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a & 0 \end{bmatrix} = 1$.

16. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule $\det(A^3 + A^4)$.

17. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -3 \\ -2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Calcule $\det(A^6 - A^5)$.

18. Sejam $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Determine a matriz X tal que

$$AXB - B = AX \det(A^T A).$$

19. Sejam

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(i) Justifique que A e B são invertíveis e determine as entradas $(2, 2)$ de A^{-1} e $(2, 3)$ de B^{-1} .

(ii) Verifique que $\det(A + B) \neq \det A + \det B$ e $\det(A - B) \neq \det A - \det B$.

20. Use a regra de Cramer para calcular as soluções dos sistemas:

$$(i) \begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 5x + 7y = 3 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + z = 1 \\ x + 2y + 2z = -1 \end{cases}$$

21. Sejam $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 9 & -8 & -1 \\ -7 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Verifique que C e D são invertíveis e calcule:

(i) $\det(2C^{-1})$

(ii) $\det(C^3(2C)^{-1})$

(iii) $\det((C^T 2C)^{-1})$

(iv) $\det(C^T \frac{1}{2} C^{-2})$

(v) $\det(C^2 + 2D)$

(vi) $\det\left(-2C^T \left(\left(-\frac{2}{3}D^3\right)^{-1}\right) \left(\left(D^T\right)^{-1} C\right)^{-1}\right)$

Sugestão: Sejam $m \in \mathbb{N}$, λ escalar, A, B e S matrizes $n \times n$ com S invertível, tem-se

(a) $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

(b) $\det(\lambda B) = \lambda^n \det B$

(c) $\det(A^T) = \det A$

(d) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

(e) $(\lambda B)^T = \lambda B^T$

(f) $S^{-m} = (S^{-1})^m$

22. Sejam A e B matrizes 3×3 tais que $\det A = \sqrt{3}$ e $\det B = \frac{1}{2}$. Calcule $\det(2A^T B^{-3})$.

23. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Seja $B = \begin{bmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & b & 2 \\ 1 & 2 & c \end{bmatrix}$. Sabendo que $\det B = 2$, calcule:

(i) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & b & 1 \\ c & 2 & 2 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} a+3 & -1 & -2 \\ b+3 & b-2 & -2 \\ c+3 & 2-c & -c \end{vmatrix}$ (iii) $\det(\frac{1}{2}B^T B)$

24. Sejam $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & 0 & c \\ d & e & 0 & f \\ g & h & 0 & i \\ x & y & -1 & z \end{vmatrix} = 5$, calcule:

(i) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}$

(iii) $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

(iv) $\begin{vmatrix} 2i & 2h & 2g \\ f-3c & e-3b & d-3a \\ c & b & a \end{vmatrix}$

(v) $\begin{vmatrix} a & g & d \\ b & h & e \\ c & i & f \end{vmatrix}$

25. Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$, calcule:

(i) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 6 & 3 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$

(ii) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a+2 & 2b+1 & 2c \\ a+1 & b+2 & c+1 \end{vmatrix}$

$$(iii) \begin{vmatrix} a-1 & b-2 & c-1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(iv) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3a+1 & 3b+2 & 3c+1 \end{vmatrix}$$

26. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Sabendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ \beta & 1 & 1 \\ 1 & \alpha + \beta & 2 \end{vmatrix} = 1$, calcule $\begin{vmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ \beta & \beta\alpha + \beta^2 & 2\beta \\ \beta\alpha & \alpha & \alpha \end{vmatrix}$.

27. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Verifique que $\begin{vmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \lambda+1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & 3 & 3 & 3 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & 4 & 4 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & 5 \\ \lambda & \lambda+1 & \lambda+2 & \lambda+3 & \lambda+4 & \lambda+5 \end{vmatrix} = \lambda^6$.

28. Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Calcule o determinante da seguinte matriz do tipo $n \times n$.

$$\begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \lambda & \cdots & & \lambda \\ 1 & \lambda+1 & 1 & \cdots & & 1 \\ \vdots & 1 & \lambda+1 & \ddots & & \\ & \vdots & 1 & \ddots & 1 & \vdots \\ & & \vdots & \ddots & \lambda+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

29. Sejam $\beta \neq 0$ e $A = (a_{ij})_{n \times n}$. Mostre que $\det A = \det (\beta^{i-j} a_{ij})$.

30. Que condições devem os parâmetros reais a, b e c verificar para que a matriz $\begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}$ seja invertível?

31. Verifique que

$$(i) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & y_1 \\ x_2 & x_2 & y_2 \end{bmatrix} = (y_1 - x_1)(y_2 - x_2)$$

$$(ii) \det \begin{bmatrix} (x_1)^3 & (x_1)^2 & x_1 & 1 \\ (x_2)^3 & (x_2)^2 & x_2 & 1 \\ (x_3)^3 & (x_3)^2 & x_3 & 1 \\ (x_4)^3 & (x_4)^2 & x_4 & 1 \end{bmatrix} = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4)$$

32. Mostre que:

$$(i) \begin{vmatrix} b+c & c+a & b+a \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(ii) \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \\ c_1 + a_1 & c_2 + a_2 & c_3 + a_3 \\ a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(iii) \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 - b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & a_2 - b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & a_3 - b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(iv) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 + b_3 + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

33. Verifique que

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & c_1 + d_1 \\ a_2 + b_2 & c_2 + d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & d_1 \\ b_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

34. Sem calcular explicitamente o determinante, mostre que para $x = 0$ e $x = 2$ se tem

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0.$$

35. Sem calcular o determinante, diga qual o coeficiente de x^3 na expressão

$$\begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 9 & 8 & 7 & x \end{vmatrix}.$$

36. Resolva as seguintes equações.

$$(i) \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad (ii) \begin{vmatrix} x & x & x & x \\ x & 4 & x & x \\ x & x & 4 & x \\ x & x & x & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad (iii) \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$$

37. Sabendo que 533, 715 e 871 são múltiplos de 13, justifique que $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 7 & 1 & 5 \\ 8 & 7 & 1 \end{vmatrix}$ é também múltiplo de 13, sem calcular o determinante.

38. Sem calcular o determinante, verifique que $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & 10 \\ 3 & -7 & 4 \end{vmatrix}$ é múltiplo de 5.

39. Seja $A = (a_{ij})_{n \times n}$ com n ímpar e tal que $a_{ij} + a_{ji} = 0$, para todos os $i, j = 1, \dots, n$. Mostre que A não é invertível. Isto é, toda a matriz anti-simétrica de ordem ímpar não é invertível.

40. Mostre que se uma matriz for ortogonal então o seu determinante ou é 1 ou é -1 . E se a matriz for unitária?

41. Seja A uma matriz real do tipo 5×6 . Calcule, justificando, $\det(A^T A)$.