Instituto Superior Técnico - Álgebra Linear - 1° Semestre 2016/2017
LEIC-A

10ª Ficha de exercícios para as aulas de problemas

1. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
Calcule as dimensões dos espaços próprios de A sem os determinar.

2. Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$
Determine, justificando, uma base ortonormada para $\mathbb{R}^3$ formada só por **vectores próprios** de A.

3. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Diga, justificando, se é possível encontrar uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A. Caso seja possível, determine essa base.

4. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual. Seja
$$A = \begin{bmatrix} -3 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$
Diga, justificando, se é possível encontrar uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A. Caso seja possível, determine essa base. Isto é, diga se é possível encontrar uma matriz ortogonal P^T que diagonalize ortogonalmente A e indique nessa caso, a correspondente matriz diagonal semelhante a A.

5. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual. Seja
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$
Determine três raízes quadradas de A, isto é, determine três matrizes B tais que $A = B^2$. Diga qual é a única raíz quadrada definida positiva B.

6. Considere o produto interno usual. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Determine a matriz B de valores próprios não negativos tal que $B^2 = A$.

7. Considere o espaço linear $\mathbb{R}^3$ munido com o produto interno usual. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

a) Mostre que $(1,1,1)$ é um vector próprio de A e diga qual é o valor próprio associado.

b) Sendo $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear representada matricialmente por A relativamente à base canónica ordenada $B_c^3 = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ (isto é, $A = M(T; B_c^3; B_c^3)$), determine $T(-1,1,0)$ e $T(-1,0,1)$.

c) Determine uma base ortogonal para $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A.

d) Determine a única matriz B definida positiva (isto é, cujos valores próprios sejam todos positivos) tal que $A = B^2$.

8. Considere o produto interno usual. Determine uma matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ cujos valores próprios sejam 1 e -1, e tal que $\mathcal{N}(A - I) = L(\{(1,1,1), (2,2,1)\})$.

9. Considere o produto interno usual. Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{bmatrix}$.

(i) Mostre que A é normal.

(ii) Diga, justificando, se A é hermitiana.

(iii) Encontre uma matriz unitária U^H que diagonalize unitariamente A e indique a correspondente matriz diagonal semelhante a A.

10. Considere o produto interno usual. Justifique a seguinte afirmação. A matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

não é ortogonalmente diagonalizável (não existe P^T ortogonal tal que

$$D = PAP^T$$

é diagonal), no entanto, é unitariamente diagonalizável (existe U^H unitária tal que

$$D = UAU^H$$

é diagonal).

11. Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^2$. Seja $A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & \alpha \end{bmatrix}$, com $\alpha \in \mathbb{R}$. Diga, justificando, se existe uma base ortogonal de $\mathbb{R}^2$ formada só por vectores próprios de A_α e determine α tal que A_α é unitariamente diagonalizável.

12. Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} u_1' = -2u_3 \\ u_2' = u_1 + 2u_2 + u_3 \\ u_3' = u_1 + 3u_3 \end{cases}$$

(i) Resolva-o, determinando a respectiva solução geral.

(ii) Determine a única solução

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \end{bmatrix}$$

tal que

$$\begin{bmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

13. Considere o produto interno usual. Classifique e diagonalize a seguinte forma quadrática.

$$Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},$$

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2.$$

14. Determine a solução de mínimos quadrados de $Au = b$, com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

calculando o correspondente vector erro de mínimos quadrados.

15. Seja

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Factorize a matriz A na forma

$$A = LU,$$

obtendo uma matriz L triangular inferior com 1's na diagonal principal e uma matriz U triangular superior.

16. Mostre que se uma matriz fôr ortogonal então o seu determinante ou é 1 ou é -1. E se a matriz fôr unitária?