Resolução da ficha de preparação para o 3^o teste de Álgebra Linear

LENO - MEAer - MEAmbi - MEBiol - MEEC - MEM - MEMec - MEQ

1) Determine o coeficiente de x^3 na expressão $\begin{vmatrix} x & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & x & 5 \\ 7 & x & x & 3 \\ x & 9 & 2 & 6 \end{vmatrix}$.

O termo de grau 3 é: $(?)\,6x^3+(?)\,4x^3$. Como as permutações correspondentes aos produtos $\underbrace{x\times x\times x\times 6}_{=6x^3}$ e $\underbrace{4\times x\times x\times x}_{=x^3}$ são respectivamente $\underbrace{(1324)}_{\text{ímpar}}$ (ímpar por ter um n^o ímpar de inversões: (32), a das colunas pois a das linhas é (1234) que é par) e $\underbrace{(4321)}_{\text{par}}$ (par por ter um n^o par de inversões: $(43)\,,(42)\,,(41)\,,(32)\,,(31)\,,(21)$, a das colunas pois a das linhas é (1234) que é par).O coeficiente de x^3 na expressão $\begin{vmatrix} x & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & x & 5 \\ 7 & x & x & 3 \\ x & 9 & 2 & 6 \end{vmatrix}$ é -2, uma vez que o termo de grau 3 é: $(-1)\,6x^3+(+1)\,4x^3=-2x^3$.

2) Seja $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{5} & 1 & 1 & -1 \\ -\sqrt{5} & 2 & -2 & 2 & \sqrt{2} \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Calcule a entrada $(5,2)$ de A^{-1}.

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{5} & 1 & 1 & -1 \\ -\sqrt{5} & 2 & -2 & 2 & \sqrt{2} \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 2 \\ \sqrt{3} & \sqrt{5} & 1 & 2 & -1 \\ -\sqrt{5} & 2 & -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 5 & 3 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2\,(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ -\sqrt{5} & 2 & -2 & \sqrt{2} \\ 5 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$=-2\,(-2)\,(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 224.\ \left(A^{-1}\right)_{(5,2)} = \frac{1}{|A|}\,(-1)^{2+5}\,|A_{2\,5}| = -\frac{1}{224}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{5} & 1 & 1 \\ -\sqrt{5} & 2 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$=-\frac{1}{224}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & \sqrt{5} & 1 & 2 \\ -\sqrt{5} & 2 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{224}2\,(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -\sqrt{5} & 2 & -2 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{4}.$$

3) Seja $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 4 & \sqrt{2} \\ 0 & 5 & -1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 6 & 3 & 0 & 4 & \sqrt{5} \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$. Calcule $\det\left((\det A)\,A^{-3}\right)$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 4 & \sqrt{2} \\ 0 & 5 & -1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 6 & 3 & 0 & 4 & \sqrt{5} \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 4 & \sqrt{2} \\ 6 & 3 & 4 & \sqrt{5} \\ 2 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 4 & \sqrt{2} \\ 6 & 3 & 4 & \sqrt{5} \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 4 \\ 6 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 2,$$

logo

$$\det\left((\det A)\, A^{-3}\right) = (\det A)^5 \det\left(A^{-3}\right) = (\det A)^5 \frac{1}{(\det A)^3} = (\det A)^2 = 4$$

4) Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & 0 & c \\ x & y & -1 & z \\ d & e & 0 & f \\ g & h & 0 & i \end{vmatrix} = -6$ calcule $\begin{vmatrix} 2i & 6g & 2h \\ 3f-2c & 9d-6a & 3e-2b \\ c & 3a & b \end{vmatrix}$.

$$-6 = \begin{vmatrix} a & b & 0 & c \\ x & y & -1 & z \\ d & e & 0 & f \\ g & h & 0 & i \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} h & g & i \\ e & d & f \\ b & a & c \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2i & 2g & 2h \\ 3f & 3d & 3e \\ c & a & b \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 2i & 6g & 2h \\ 3f & 9d & 3e \\ c & 3a & b \end{vmatrix} = -\frac{1}{18}\begin{vmatrix} 2i & 6g & 2h \\ 3f-2c & 9d-3a & 3e-2b \\ c & 3a & b \end{vmatrix}.$$

Logo

$$\begin{vmatrix} 2i & 6g & 2h \\ 3f-2c & 9d-6a & 3e-2b \\ c & 3a & b \end{vmatrix} = 108.$$

5) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$. Determine todos os valores de x para os quais a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & a & -b \\ -\frac{1}{a} & x & x^2 \end{bmatrix}$ é invertível.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & a & -b \\ -\frac{1}{a} & x & x^2 \end{bmatrix}$ invertível $\Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & a & -b \\ -\frac{1}{a} & x & x^2 \end{bmatrix} \neq 0$. Como

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & a & -b \\ -\frac{1}{a} & x & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & a & -b \\ 0 & x & x^2+\frac{c}{a} \end{vmatrix} = ax^2 + bx + c$$

então $\begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & a & -b \\ -\frac{1}{a} & x & x^2 \end{bmatrix}$ é invertível sse $x \neq \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

6) Sejam $A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&0\end{bmatrix}$ e $B=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&1\\1&0&0\end{bmatrix}$. Determine, se existirem, matrizes diagonais D_1 e D_2 e matrizes invertíveis $(P_1)^{-1}$ e $(P_2)^{-1}$ tais que $D_1=P_1A(P_1)^{-1}$ e $D_2=P_2B(P_2)^{-1}$.

$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&0\\0&1&0-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda(1-\lambda)^2$. Logo os valores próprios de A são: 0 e 1. Como

$$\mathcal{N}(A)=L(\{(0,0,1)\})\quad\text{e}\quad\mathcal{N}(A-I)=L(\{(1,0,0),(0,1,1)\})$$

então poderá ter-se a seguinte base de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A: $\{(0,0,1),(1,0,0),(0,1,1)\}$, isto é,

$$\mathbb{R}^3=\mathcal{N}(A)\oplus\mathcal{N}(A-I).$$

Logo, por exemplo para

$$(P_1)^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}\quad\text{e}\quad D_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},$$

tem-se $D_1=P_1A(P_1)^{-1}$.

Observação. Como $A^2=A$, A é idempotente e assim é a matriz (relativamente a uma base) de uma projecção.

$|B-\lambda I|=\begin{vmatrix}0-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&1\\1&0&0-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^2(\lambda-1)$. Logo os valores próprios de B são: 0 e 1. Como

$$\mathcal{N}(B)=L(\{(0,-1,1)\})\quad\text{e}\quad\mathcal{N}(B-I)=L(\{(0,1,0)\})$$

então não existe uma base de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de B, isto é,

$$\mathbb{R}^3\neq\mathcal{N}(B)\oplus\mathcal{N}(B-I).$$

Logo, não existe $(P_2)^{-1}$ tal que $D_2=P_2B(P_2)^{-1}$, com $D_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

Observação. Como $B^2\neq B$, B não é idempotente e assim não é a matriz (relativamente a uma base) de uma projecção.

7) Considere a matriz que admite os vectores próprios $v_1=(-1,0,1)$, $v_2=(0,1,0)$, $v_3=(1,0,3)$, associados respectivamente aos valores próprios $0,2$ e 4. Determine essa matriz.

Como $m_a(0)=m_a(2)=m_a(4)=1$ então $m_g(0)+m_g(2)+m_g(4)=3$ e assim A é diagonalizável, isto é,

$$\mathbb{R}^3=\mathcal{N}(A)\oplus\mathcal{N}(A-2I)\oplus\mathcal{N}(A-4I).$$

Logo

$$A=P^{-1}DP=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&3\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\3&0&3\end{bmatrix}.$$

8) Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ tal que

$$T\left(1-t^2\right) = -1+t^2, \qquad T\left(1+t^2\right) = 1+t^2, \qquad T\left(t+t^2\right) = t+t^2.$$

a) Indique os valores próprios de T, indicando as respectivas multiplicidades algébricas e geométricas.

b) Diga se $1-t$ é vector próprio de T.

c) Determine uma base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}_2$ tal que a matriz $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B})$ seja uma matriz diagonal.

a) Como $T(1+t^2) = 1+t^2$ e $T(t+t^2) = t+t^2$ então 1 é valor próprio de T e $1+t^2$ e $t+t^2$ são dois vectores próprios de T, linearmente independentes e associados ao valor próprio 1. Como $T(1-t^2) = (-1)(1-t^2)$ então -1 é valor próprio de T e $1-t^2$ é um vector próprio de T associado ao valor próprio -1. Logo $m_g(1) = 2$ e $m_g(-1) = 1$ e assim, como $\dim \mathcal{P}_2 = 3$ então $m_a(1) = 2$, $m_a(-1) = 1$, sendo assim 1 e -1 os únicos valores próprios de T.

b) $T(1-t) = T(1+t^2-t-t^2) = T(1+t^2) - T(t+t^2) = 1+t^2-t-t^2 = 1-t$ logo $1-t$ é vector próprio de T associado ao valor próprio 1.

c) Pela alínea a) $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{vp} = \{1-t^2, 1+t^2, t+t^2\}$ é uma base de $\mathcal{P}_2$ de vectores próprios de T então T é diagonalizável, isto é, $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9) Considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual e os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$U = L(\{(1,0,1,0),(0,0,1,1)\}), \qquad V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : \ x - z + w = 0\}.$$

a) Determine uma base ortogonal para $\mathbb{R}^4$ que inclua o vector $(1,0,3,2)$.

b) Calcule $d\left((1,0,1,1), U^\perp \cap V^\perp\right)$.

a) Tem-se $(1,0,3,2),(0,1,0,0) \in V$ e $\langle (1,0,3,2),(0,1,0,0)\rangle = 0$. Por outro lado, como

$$V^\perp = L(\{(1,0,-1,1)\})$$

então $\{(1,0,3,2),(0,1,0,0),(1,0,-1,1)\}$ é um conjunto ortogonal. Logo

$$\{(1,0,3,2),(0,1,0,0),(1,0,-1,1),w\}$$

é uma base ortogonal para $\mathbb{R}^4$ com

$$w \in \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{bmatrix}\right) = L(\{(5,0,1,-4)\}).$$

Assim $\{(1,0,3,2),(0,1,0,0),(1,0,-1,1),(5,0,1,-4)\}$ é uma base ortogonal para $\mathbb{R}^4$ que inclui o vector $(1,0,3,2)$.

Resolução alternativa.

$\langle(1,0,3,2),(0,1,0,0)\rangle = 0$ e $\{(1,0,3,2),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$.

Atendendo a

$$(0,0,1,0) - \underset{(1,0,3,2)}{\text{proj}}(0,0,1,0) - \underset{(0,1,0,0)}{\text{proj}}(0,0,1,0) = (0,0,1,0) - \frac{3}{14}(1,0,3,2) = \left(-\frac{3}{14},0,\frac{5}{14},-\frac{3}{7}\right),$$

seja $u = (-3,0,5,-6)$. Logo $\{(1,0,3,2),(0,1,0,0),(-3,0,5,-6),v\}$ é uma base ortogonal para $\mathbb{R}^4$ com

$$v \in \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & -6 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(-2,0,0,1)\}\right).$$

Assim $\{(1,0,3,2),(0,1,0,0),(-3,0,5,-6),(-2,0,0,1)\}$ é uma base ortogonal para $\mathbb{R}^4$ que inclui o vector $(1,0,3,2)$.

b)

$$d\left((1,0,1,1),U^\perp \cap V^\perp\right) = \left\| P_{\left(U^\perp\cap V^\perp\right)^\perp}(1,0,1,1)\right\| = \|P_{U+V}(1,0,1,1)\| \underset{U\subset V}{=}$$

$$= \|P_V(1,0,1,1)\| = \|(1,0,1,1) - P_{V^\perp}(1,0,1,1)\| = \left\|(1,0,1,1) - \underset{(1,0,-1,1)}{\text{proj}}(1,0,1,1)\right\| =$$

$$= \left\|(1,0,1,1) - \frac{1}{3}(1,0,-1,1)\right\| = \frac{2}{3}\sqrt{6}.$$

10) Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$V = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0\right\}, \qquad W = L\left(\{(0,0,1,1),(1,-1,0,0),(0,0,1,0)\}\right).$$

a) Determine uma base ortogonal para $V^\perp$.

b) Determine $P_V(2,2,1,1)$.

c) Determine uma base ortogonal para $\mathbb{R}^4$ que inclua 3 vectores de W.

a) $V^\perp = \left(\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x+y=0\}\right)^\perp = \left(\mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^\perp = L\left(\{(1,1,0,0)\}\right)$.

Logo $\{(1,1,0,0)\}$ é uma base ortogonal para $V^\perp$.

b) Como $\{(1,1,0,0)\}$ é uma base ortogonal para $V^\perp$, tem-se

$$\begin{aligned} P_V(2,2,1,1) &= (2,2,1,1) - P_{V^\perp}(2,2,1,1) = (2,2,1,1) - \underset{(1,1,0,0)}{\text{proj}}(2,2,1,1) = \\ &= (2,2,1,1) - \frac{4}{2}(1,1,0,0) = (0,0,1,1). \end{aligned}$$

c) Como $\mathbb{R}^4 = W^\perp \oplus W$ então, aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt ao conjunto $\{(0,0,1,1),(1,-1,0,0),(0,0,1,0)\}$, conclui-se que

$$\left\{\underbrace{(1,1,0,0)}_{\in W^\perp}, \underbrace{(0,0,1,1),(1,-1,0,0),(0,0,1,0)-\underset{(0,0,1,1)}{\operatorname{proj}}(0,0,1,0)-\underset{(1,-1,0,0)}{\operatorname{proj}}(0,0,1,0)}_{\in W}\right\}$$

$$= \left\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(1,-1,0,0),\left(0,0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\}$$

é uma base ortogonal para $\mathbb{R}^4$ que inclui 3 vectores de W.

11) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$ e considere o produto interno usual. Diagonalize ortogonalmente A. Isto é, determine uma matriz ortogonal P^T e uma matriz diagonal D tais que $D = PAP^T$.

$|A| = 0$ logo 0 é valor próprio de A. Como $\operatorname{tr} A = 12$ e

$$m_a(0) \geq m_g(0) = \dim \mathcal{N}(A) = \operatorname{nul}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2$$

então os valores próprios de A são 0 e 12 tendo-se $|A - \lambda I| = (-\lambda)^2 (12-\lambda)$ e

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{N}(A - 12I).$$

Como $\mathcal{N}(A) = L(\{(1,0,-1),(2,-1,0)\})$ e por A ser simétrica

$$\mathcal{N}(A-12I) = (\mathcal{N}(A))^\perp = L(\{(1,2,1)\})$$

então considerando a seguinte base ortogonal de $\mathcal{N}(A)$

$$\left\{(1,0,-1),(2,-1,0)-\underset{(1,0,-1)}{\operatorname{proj}}(2,-1,0)\right\} = \{(1,0,-1),(1,-1,1)\}$$

e tendo-se $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$, com $P^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$ tem-se $D = PAP^T$.

Observação. Podia ter-se calculado directamente $\mathcal{N}(A - 12I)$.

12) Considere em $\mathcal{P}_1$ um produto interno $\langle , \rangle$ para o qual se tenha $G_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B}$ é a base ordenada de $\mathcal{P}_1$ que verifica $S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathcal{B}_c = \{1, t\}$. Determine uma base ortonormada para $(L(\{2+3t\}))^\perp$.

$$\langle a_0 + a_1 t, b_0 + b_1 t \rangle = \left([a_0 + a_1 t]_\mathcal{B}\right)^T G_\mathcal{B} [b_0 + b_1 t]_\mathcal{B} =$$

$$= \left([a_0 + a_1 t]_{\mathcal{B}}\right)^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} [b_0 + b_1 t]_{\mathcal{B}} =$$

$$= \left(S_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}} [a_0 + a_1 t]_{\mathcal{B}_c}\right)^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} S_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}} [b_0 + b_1 t]_{\mathcal{B}_c} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$(L(\{2+3t\}))^{\perp} = \{b_0 + b_1 t \in \mathcal{P}_1 : \langle 2+3t, b_0 + b_1 t \rangle = 0\} =$$

$$= \left\{ b_0 + b_1 t \in \mathcal{P}_1 : \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = 0 \right\} =$$

$$= \{b_0 + b_1 t \in \mathcal{P}_1 : 11 b_1 - 4 b_0 = 0\} = L(\{11 + 4t\}).$$

Logo $\{11+4t\}$ é uma base ortogonal para $(L(\{2+3t\}))^{\perp}$. Como

$$\|11+4t\| = \sqrt{\langle 11+4t, 11+4t \rangle} = \sqrt{\begin{bmatrix} 11 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 11 \\ 4 \end{bmatrix}} = 5$$

então $\left\{ \frac{11}{5} + \frac{4}{5} t \right\}$ é uma base ortonormada para $(L(\{2+3t\}))^{\perp}$.

13) Considere o subespaço $V = \{X \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \operatorname{tr} X = 0\}$ de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Considere em V o produto interno $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ definido por

$$\langle A, B \rangle = \operatorname{tr}\left(A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} B^T \right).$$

Considere ainda o subespaço $W = \left\{ X \in V : X = X^T \right\}$ de V. Determine uma base ortonormada para $\{X \in V : \langle X, Y \rangle = 0, \text{ para todo } Y \in W\}$.

Tem-se

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a + d = 0 \right\} = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right)$$

e

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right).$$

Logo

$$\{X \in V : \langle X, Y \rangle = 0, \text{ para todo } Y \in W\} =$$

$$\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} : \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\rangle = 0 = \left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle \right\} =$$

$$\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} : \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^T \right) = 0 = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T \right) \right\} =$$

$$\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} : 6a = 0 \quad \text{e} \quad 4b + 2c = 0 \right\} = L\left(\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right).$$

Logo $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ é uma base ortogonal de $\{X \in V : \langle X, Y \rangle = 0, \text{ para todo } Y \in W\}$. Como

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{\operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}^T \right)} = \sqrt{12}$$

então

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

é uma base ortonormada para $\{X \in V : \langle X, Y \rangle = 0, \text{ para todo } Y \in W\}$.

14) Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual. Determine, justificando, uma matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ simétrica tal que $\det A = -5$,

$$\mathcal{L}(A + I) = L(\{(2, 1, 0), (-1, 0, 1)\}) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A - 5I) = L(\{(1, -1, 0), (0, 1, -1)\}).$$

Como A é simétrica, então A é ortogonalmente diagonalizável, e assim, como

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(A + I) &= (\mathcal{L}(A + I))^\perp = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = L(\{(1, -2, 1)\}), \\ \mathcal{N}(A - 5I) &= (\mathcal{L}(A - 5I))^\perp = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right) = L(\{(1, 1, 1)\}), \end{aligned}$$

e $\det A = -5$, então os valores próprios de A são -1, 5 e 1, tendo-se

$$\mathcal{N}(A - I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) = L(\{(-1, 0, 1)\}).$$

Logo $A = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}}_{P^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}}_{P} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$

15) Seja A invertível do tipo $n \times n$ com ≥ 2. Considere $\operatorname{adj} A = (\operatorname{cof} A)^T$. Mostre que

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = (\det A)^{n-2} A.$$

$$\operatorname{adj}(\operatorname{adj} A) = \left(\operatorname{cof}\left((\operatorname{cof} A)^T \right) \right)^T = \left(\operatorname{cof}\left(|A| A^{-1} \right) \right)^T =$$

$$= \det\left(|A| A^{-1} \right) \left(|A| A^{-1} \right)^{-1} = |A|^n \frac{1}{|A|} \frac{1}{|A|} A = (\det A)^{n-2} A.$$