

Resolução do 3º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

$$1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & \sqrt{2} & 0 & 7 \\ 5 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & -2 & 0 \\ 3 & 4 & \sqrt{5} & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & \sqrt{2} & 7 \\ 3 & 4 & \sqrt{5} & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & \sqrt{2} & 7 \\ 3 & 4 & \sqrt{5} & 6 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 4.$$

$$2) \text{ a) } \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2.$$

$$\text{b) } m_g(1) = 1 \text{ pois } m_a(1) = 1 \text{ e } m_g(1) \leq m_a(1). \quad m_g(2) = \dim \mathcal{N}(A - 2I) = \text{nul} \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \right) = 1.$$

Como $m_a(2) = 2 \neq 1 = m_g(2)$ então A não é diagonalizável.

3) a) $V = \mathcal{N}([1 \ 0 \ 1 \ 1])$ logo $V^\perp = L(\{(1, 0, 1, 1)\})$ e $\{(1, 0, 1, 1)\}$ é uma base ortogonal para V^\perp .

b) $U^\perp = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = L(\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0)\})$ e $\{(1, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 0)\}$ é uma base ortogonal para U^\perp . Logo $P_{U^\perp}(1, 0, -1, -1) = \text{proj}_{(1,0,1,1)}(1, 0, -1, -1) + \text{proj}_{(0,1,0,0)}(1, 0, -1, -1) = (-\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

$$\text{c) } d((1, 0, -1, -1), U + V) = \|(1, 0, -1, -1) - P_{U+V}(1, 0, -1, -1)\|_{U+V=V} = \|(1, 0, -1, -1) - P_V(1, 0, -1, -1)\| = \|P_{V^\perp}(1, 0, -1, -1)\| = \|\text{proj}_{(1,0,1,1)}(1, 0, -1, -1)\| = \|\frac{-1}{3}(1, 0, 1, 1)\| = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4) $\begin{vmatrix} 7-\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 0-\lambda & 0 \\ 5 & 0 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda) \begin{vmatrix} 7-\lambda & 5 \\ 5 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(2-\lambda)(12-\lambda)$. Logo os valores próprios de A são: 0, 2 e 12. Como A é simétrica, então A é ortogonalmente diagonalizável. Como $\mathcal{N}(A) = L(\{(0, 1, 0)\})$, $\mathcal{N}(A - 2I) = L(\{(-1, 0, 1)\})$ e $\mathcal{N}(A - 12I) = L(\{(1, 0, 1)\})$ então poderá ter-se a seguinte base ortonormada de \mathbb{R}^3 formada só por vectores próprios de A :

$$\left\{ (0, 1, 0), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}.$$

Logo, por exemplo para $P^T = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$, tem-se $D = PAP^T$.

5) Seja $\mathcal{B} = \{2+t, t+2t^2\}$. Note-se que $G_{\mathcal{B}} = I$ e que $\sqrt{2} + \sqrt{2}t + \sqrt{2}t^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(2+t) + \frac{\sqrt{2}}{2}(t+2t^2)$. Seja $a_0 + a_1t + a_2t^2 \in U$ tal que $\langle \sqrt{2} + \sqrt{2}t + \sqrt{2}t^2, a_0 + a_1t + a_2t^2 \rangle = 0$. Como $\langle \sqrt{2} + \sqrt{2}t + \sqrt{2}t^2, a_0 + a_1t + a_2t^2 \rangle = ([\sqrt{2} + \sqrt{2}t + \sqrt{2}t^2]_{\mathcal{B}})^T G_{\mathcal{B}} [a_0 + a_1t + a_2t^2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} [a_0 + a_1t + a_2t^2]_{\mathcal{B}}$ então queremos determinar $a_0 + a_1t + a_2t^2 \in U$ tal que $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} [a_0 + a_1t + a_2t^2]_{\mathcal{B}} = 0$. Ora $\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}\right) = L(\{(1, -1)\})$, logo $a_0 + a_1t + a_2t^2 = 1(2+t) + (-1)(t+2t^2) = 2 - 2t^2$. Assim $\langle \sqrt{2} + \sqrt{2}t + \sqrt{2}t^2, 2 - 2t^2 \rangle = 0$, como $\|\sqrt{2} + \sqrt{2}t + \sqrt{2}t^2\| = 1$ e $\|2 - 2t^2\| = \sqrt{\langle 2 - 2t^2, 2 - 2t^2 \rangle} = \sqrt{\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}} = \sqrt{2}$ então $\{\sqrt{2} + \sqrt{2}t + \sqrt{2}t^2, \sqrt{2} - \sqrt{2}t^2\}$ é uma base ortonormada para U que inclui o vector $\sqrt{2} + \sqrt{2}t + \sqrt{2}t^2$.

6) Para que A e B sejam semelhantes é necessário (mas não suficiente) que $\text{tr } A = \text{tr } B$ e $\det A = \det B$, ou seja, é necessário que $a+4 = b-2$ e que $3a = 24-3b$. Assim, é necessário que $a = 1$ e $b = 7$. Vejamos se $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 7 & -4 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ -6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ são diagonalizáveis. Como $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)^2$ e $\begin{vmatrix} 7-\lambda & -4 & 0 \\ 6 & -3-\lambda & 0 \\ -6 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)^2$ então ambas têm os mesmos valores próprios, com $m_a(1) = 2$ e $m_a(3) = 1$ em ambas. Para A e para B tem-se $m_g(3) = 1$ uma vez que $m_a(3) = 1$. No entanto, para A tem-se $m_g(1) = \text{nul}(A - I) = 1$ mas para B tem-se $m_g(1) = \text{nul}(B - I) = 2$. Logo A não é diagonalizável mas B é. Se A e B fossem semelhantes então como B é diagonalizável, A também seria, o que não acontece. Logo não existem a e b tais que A e B sejam semelhantes.

7) Sejam $B, C \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ hermitianas e semidefinidas positivas tais que $B^2 = A = C^2$. Suponhamos com vista a uma contradição que $B \neq C$. Seja $\lambda \neq 0$ um valor próprio de $B - C$ e seja $u \neq 0$ um vector próprio associado, isto é, $(B - C)u = \lambda u$. Tem-se

$$0 = \langle (B^2 - C^2)u, u \rangle = \langle (B(B - C) + (B - C)C)u, u \rangle = \langle B(B - C)u, u \rangle + \langle (B - C)Cu, u \rangle \stackrel{(B-C)^H = B-C}{=} \\ \stackrel{(B-C)^H = B-C}{=} \langle B(B - C)u, u \rangle + \langle Cu, (B - C)u \rangle = \langle B\lambda u, u \rangle + \langle Cu, \lambda u \rangle \stackrel{\lambda \in \mathbb{R}}{=} \lambda(\langle Bu, u \rangle + \langle Cu, u \rangle).$$

Como $\lambda \neq 0$ então

$$0 = \lambda(\langle Bu, u \rangle + \langle Cu, u \rangle) \Leftrightarrow 0 = \langle Bu, u \rangle + \langle Cu, u \rangle.$$

Por outro lado, como B e C são semidefinidas positivas então $\langle Bu, u \rangle \geq 0$ e $\langle Cu, u \rangle \geq 0$. Assim

$$0 = \langle Bu, u \rangle + \langle Cu, u \rangle \Leftrightarrow \langle Bu, u \rangle = \langle Cu, u \rangle = 0.$$

Deste modo,

$$0 = 0 - 0 = \langle Bu, u \rangle - \langle Cu, u \rangle = \langle (B - C)u, u \rangle = \langle \lambda u, u \rangle = \lambda \|u\|^2,$$

ou seja, $0 = \lambda \|u\|^2$ o que é uma contradição pois $\lambda \neq 0$ e $u \neq 0$. Logo é única a matriz B hermitiana e semidefinida positiva tal que $B^2 = A$.