Resolução do 3^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LEAN - LEMat - MEAer - MEAmbi - MEMec - MEEC

1) a) $V^{\perp} = \left(\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0\}\right)^{\perp} = \left(\mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)^{\perp} = L\left(\{(1,1,0,0)\}\right).$

Logo $\{(1,1,0,0)\}$ é uma base ortogonal para $V^{\perp}$.

b) Como $\{(1,1,0,0)\}$ é uma base ortogonal para $V^{\perp}$, tem-se

$$\begin{aligned} P_V(2,2,1,1) &= (2,2,1,1) - P_{V^{\perp}}(2,2,1,1) = (2,2,1,1) - \operatorname*{proj}_{(1,1,0,0)}(2,2,1,1) = \\ &= (2,2,1,1) - \frac{4}{2}(1,1,0,0) = (0,0,1,1). \end{aligned}$$

c) Como $\mathbb{R}^4 = W^{\perp} \oplus W$ então, aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt ao conjunto $\{(0,0,1,1), (1,-1,0,0), (0,0,1,0)\}$, conclui-se que

$$\left\{ \underbrace{(1,1,0,0)}_{\in W^{\perp}}, \underbrace{(0,0,1,1), (1,-1,0,0), (0,0,1,0) - \operatorname*{proj}_{(0,0,1,1)}(0,0,1,0) - \operatorname*{proj}_{(1,-1,0,0)}(0,0,1,0)}_{\in W} \right\}$$

$$= \left\{ (1,1,0,0), (0,0,1,1), (1,-1,0,0), \left(0,0,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right) \right\}$$

é uma base ortogonal para $\mathbb{R}^4$ que inclui 3 vectores de W.

2) Para que $\mathcal{B}$ seja ortonormada é necessário que se tenha $G = I$ que por sua vez é simétrica e definida positiva, pelo que a aplicação

$$\langle , \rangle : \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R} \ \text{ dada por } \ \langle a_0 + a_1 t, b_0 + b_1 t \rangle = \left(S_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} \right)^T I \left(S_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} \right)$$

define em $\mathcal{P}_1$ um produto interno, tendo-se

$$\|t\| = \sqrt{\langle t, t \rangle} = \sqrt{\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^T \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right)} = \sqrt{2}.$$

3) $\det A = (-2)(-1)^{4+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = -2 \times 2 (-1)^{3+3} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 12 \neq 0,$

logo A é invertível e $(A^{-1})_{(5,2)} = \left(\frac{1}{\det A} (\operatorname{cof} A)^T \right)_{(5,2)} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{cof} A)_{(2,5)} =$

$= \frac{1}{12}(-1)^{2+5} \det \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{12}(-2)(-1)^{3+2} \det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = -1.$

4) a) Como $T(1,0,0)=(1,0,1)$, $T(0,1,0)=(0,1,0)$ e $T(0,0,1)=(4,0,4)$ então $M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)=\begin{bmatrix}1&0&4\\0&1&0\\1&0&4\end{bmatrix}$.Sendo $A=M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)$ tem-se $\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda&0&4\\0&1-\lambda&0\\1&0&4-\lambda\end{bmatrix}=$
$=-\lambda^3+6\lambda^2-5\lambda=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-5)$. Logo os valores próprios de T são: 0, 1 e 5. As respectivas multiplicidades algébricas são dadas por $m_a(0)=m_a(1)=m_a(5)=1$.

b) Como $\mathcal{N}(T)\underset{\mathcal{B}_c^3}{=}\mathcal{N}(A)=L(\{(-4,0,1)\})$, $\mathcal{N}(T-I)\underset{\mathcal{B}_c^3}{=}\mathcal{N}(A-I)=L(\{(0,1,0)\})$ e $\mathcal{N}(T-5I)\underset{\mathcal{B}_c^3}{=}\mathcal{N}(A-5I)=L(\{(1,0,1)\})$ então $\mathcal{B}_1=\{(-4,0,1),(0,1,0),(1,0,1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de T.
Logo, tem-se $M(T;\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_1)=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{bmatrix}$ a qual é uma matriz diagonal.

c) Como a matriz $A=M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)=\begin{bmatrix}1&0&4\\0&1&0\\1&0&4\end{bmatrix}$ não é simétrica pois $A\neq A^T$, então A não é ortogonalmente diagonalizável, ou seja, não pode existir uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de T.

5) Como A é simétrica, então A é ortogonalmente diagonalizável, e assim, como

$$\begin{aligned}\mathcal{N}(A+I)&=(\mathcal{L}(A+I))^\perp=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}2&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\right)=L(\{(1,-2,1)\}),\\ \mathcal{N}(A-5I)&=(\mathcal{L}(A-5I))^\perp=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\end{bmatrix}\right)=L(\{(1,1,1)\}),\end{aligned}$$

e $\det A=-5$, então os valores próprios de A são -1, 5 e 1, tendo-se

$$\mathcal{N}(A-I)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&-2&1\\1&1&1\end{bmatrix}\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}\right)=L(\{(-1,0,1)\}).$$

Logo $A=\underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\0&-\frac{\sqrt{6}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{6}}{6}&\frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}}_{P^T}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&5\end{bmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}\\\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{6}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}\\\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{3}}{3}\end{bmatrix}}_{P}=\begin{bmatrix}2&2&1\\2&1&2\\1&2&2\end{bmatrix}$.

6) Sendo $A\in\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ uma matriz hermitiana, todos os seus valores próprios são reais, além disso A é unitariamente diagonalizável tal como A^2. Se λ fôr valor próprio de A então $Au=\lambda u$ com $u\neq\mathbf{0}$ e $A^2u=\lambda Au=\lambda^2u$ e assim λ^2 é valor próprio de A^2, além disso como A e A^2 são unitariamente diagonalizáveis, os valores próprios de A^2 são todos os λ^2 com λ valor próprio de A. Se $A=\mathbf{0}$ a desigualdade fica provada. Seja $A\neq\mathbf{0}$. Como $\operatorname{car}A=n^o$ de valores próprios não nulos de A, sejam $\lambda_1,\dots,\lambda_{\operatorname{car}A}$ os valores próprios não nulos de A. Tem-se $\operatorname{tr}A=\sum_{i=1}^{\operatorname{car}A}\lambda_i$ e $\operatorname{tr}(A^2)=\sum_{i=1}^{\operatorname{car}A}\lambda_i^2$. Logo

$$\begin{aligned}0&\leq\sum_{i=1}^{\operatorname{car}A}\left(\lambda_i-\frac{\operatorname{tr}A}{\operatorname{car}A}\right)^2=\sum_{i=1}^{\operatorname{car}A}\lambda_i^2+\sum_{i=1}^{\operatorname{car}A}\left(\frac{\operatorname{tr}A}{\operatorname{car}A}\right)^2-2\sum_{i=1}^{\operatorname{car}A}\lambda_i\frac{\operatorname{tr}A}{\operatorname{car}A}=\\&=\operatorname{tr}\left(A^2\right)+\operatorname{car}A\left(\frac{\operatorname{tr}A}{\operatorname{car}A}\right)^2-2\operatorname{tr}A\frac{\operatorname{tr}A}{\operatorname{car}A}=\operatorname{tr}\left(A^2\right)-\frac{(\operatorname{tr}A)^2}{\operatorname{car}A},\end{aligned}$$

pelo que $(\operatorname{tr}A)^2\leq(\operatorname{car}A)\operatorname{tr}(A^2)$.