Resolução do 3^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR - LEIC-A

1) a)

$$U = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - 2z = 0 \; e \; y - 2w = 0\} = L\left(\{(2,0,1,0),(0,2,0,1)\}\right).$$

O conjunto $\{(2,0,1,0),(0,2,0,1)\}$ é uma base ortogonal para U, uma vez que é uma base de U (gera U, é formado por dois vectores e $\dim U = \operatorname{nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 2$) e é um conjunto ortogonal ($\langle (2,0,1,0),(0,2,0,1)\rangle = 0$).

Justificação alternativa: o conjunto $\{(2,0,1,0),(0,2,0,1)\}$ é uma base ortogonal para U pois é formado por dois vectores não nulos e ortogonais entre si ($\langle (2,0,1,0),(0,2,0,1)\rangle = 0$) num espaço U de dimensão 2 ($\dim U = \operatorname{nul}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 2$).

b)

$$V = L\left(\{(2,2,1,1),(0,0,2,2)\}\right).$$

Pode usar-se Gram-Schmidt para construir uma base ortogonal para V ou notar-se que

$$V = L\left(\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}\right)$$

e como $\langle (1,1,0,0),(0,0,1,1)\rangle = 0$ ter-se então

$$P_V(1,1,-1,-1) = \underset{(1,1,0,0)}{\operatorname{proj}}(1,1,-1,-1) + \underset{(0,0,1,1)}{\operatorname{proj}}(1,1,-1,-1) =$$

$$= \frac{\langle (1,1,0,0),(1,1,-1,-1)\rangle}{\|(1,1,0,0)\|^2}(1,1,0,0) + \frac{\langle (0,0,1,1),(1,1,-1,-1)\rangle}{\|(0,0,1,1)\|^2}(0,0,1,1) =$$
$$= (1,1,0,0) + (0,0,-1,-1) = (1,1,-1,-1).$$

Resolução alternativa: como

$$(1,1,-1,-1) = \frac{1}{2}(2,2,1,1) - \frac{3}{4}(0,0,2,2) \in V$$

então

$$P_V(1,1,-1,-1) = (1,1,-1,-1).$$

c)

$$d\left((1,1,-1,-1), U^\perp + V^\perp\right) = \left\| P_{\left(U^\perp + V^\perp\right)^\perp}(1,1,-1,-1) \right\| = \left\| P_{U\cap V}(1,1,-1,-1) \right\|.$$

Como

$$U \cap V = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = L\left(\{(2,2,1,1)\}\right)$$

então

$$d\left((1,1,-1,-1)\,,U^{\perp}+V^{\perp}\right)=\|P_{U\cap V}\,(1,1,-1,-1)\|=$$

$$=\left\|\underset{(2,2,1,1)}{\operatorname{proj}}\,(1,1,-1,-1)\right\|=\left\|\frac{\langle(2,2,1,1),(1,1,-1,-1)\rangle}{\|(2,2,1,1)\|^2}(2,2,1,1)\right\|=$$

$$=\frac{|\langle(2,2,1,1),(1,1,-1,-1)\rangle|}{\|(2,2,1,1)\|^2}\,\|(2,2,1,1)\|=\frac{|\langle(2,2,1,1),(1,1,-1,-1)\rangle|}{\|(2,2,1,1)\|}=\sqrt{\frac{2}{5}}.$$

2) a) Como $\mathcal{B}_c^3=\{(1,0,0)\,,(0,1,0)\,,(0,0,1)\}$ tem-se

$$\mathcal{N}\,(T_1)=\mathcal{N}\left(M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B})\right)=\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}\right)=L\left(\{(0,1,0)\}\right).$$

Como $\{(0,1,0)\}$ gera $\mathcal{N}\,(T_1)$ e $\{(0,1,0)\}$ é linearmente independente, o conjunto $\{(0,1,0)\}$ é então uma base para $\mathcal{N}\,(T_1)$. Logo $\dim\mathcal{N}\,(T_1)=1$ e tem-se

$$\dim\mathcal{I}\,(T_1)=\dim\mathbb{R}^3-\dim\mathcal{N}\,(T_1)=3-1=2=\dim\mathcal{P}_1.$$

Como $\dim\mathcal{I}\,(T_1)=\dim\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{I}\,(T_1)\subset\mathcal{P}_1$ então $\mathcal{I}\,(T_1)=\mathcal{P}_1$, isto é, T_1 é sobrejectiva.

b) Como $S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1}}=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}$ então

$$M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1})=S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1}}M(T_1;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B})=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&1\\1&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}.$$

c) Como T_2 é linear

$$T_2(0,1,0)=T_2\,(1,1,1)-\frac{1}{3}T_2\,(1,0,2)-\frac{1}{3}T_2\,(2,0,1)=(1,1)-\frac{1}{3}\,(1,2)-\frac{1}{3}\,(2,1)=(0,0)\,.$$

Os vectores $T_2\,(1,1,1)=(1,1)$ e $T_2\,(1,0,2)=(1,2)$ são linearmente independentes e como tal formam uma base de $\mathbb{R}^2$ (2 vectores independentes num espaço de dimensão 2 formam necessariamente uma base desse espaço). Deste modo $\mathcal{I}\,(T_2)=\mathbb{R}^2$ uma vez que

$$\mathbb{R}^2=L\left(\{T_2\,(1,1,1)\,,T_2\,(1,0,2)\}\right)\subset\mathcal{I}\,(T_2)\subset\mathbb{R}^2.$$

Além disso, como

$$(1,-1)=(2,1)-(1,2)=T_2\,(2,0,1)-T_2\,(1,0,2)\underset{T_2\text{ é linear}}{=}T_2\,(1,0,-1)\,,$$

o vector $(1,0,-1)$ é uma solução particular de $T_2(x,y,z)=(1,-1)$. Por outro lado, como

$$\dim\mathcal{N}\,(T_2)=\dim\mathbb{R}^3-\dim\mathcal{I}\,(T_2)=3-2=1$$

e $(0,1,0)\in\mathcal{N}\,(T_2)$, tem-se $\mathcal{N}\,(T_2)=L\left(\{(0,1,0)\}\right)$ e assim a solução geral da equação linear

$$T_2(x,y,z)=(1,-1)$$

é dada por

$$\{(1,0,-1)\} + L(\{(0,1,0)\}).$$

d) Como $T_2(0,1,0) = (0,0)$ e

$$T_2(1,0,0) \underset{T_2 \text{ é linear}}{=} T_2(2,0,1) - T_2(1,1,1) + T_2(0,1,0) = (2,1) - (1,1) + (0,0) = (1,0),$$

$$T_2(0,0,1) = \underset{T_2 \text{ é linear}}{=} T_2(1,0,2) - T_2(1,1,1) + T_2(0,1,0) = (1,2) - (1,1) + (0,0) = (0,1)$$

tem-se

$$M(T_2; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Seja $M(T; \mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1}; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Tem-se $(T \circ T_1)(x,y,z) = T_2(x,y,z)$, para todo o $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ se e só se

$$M(T; \mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1}; \mathcal{B}_c^2) M(T_1; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1}) = M(T_2; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^2)$$

se e só se

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja, se e só se

$$\begin{bmatrix} 2a+b & 0 & a+b \\ 2c+d & 0 & c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Deste modo, tem-se $M(T; \mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_1}; \mathcal{B}_c^2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ e assim $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 - a_1 \\ 2a_1 - a_0 \end{bmatrix}$, pelo que

$$T(a_0 + a_1 t) = (a_0 - a_1, 2a_1 - a_0),$$

para todo o $a_0 + a_1 t \in \mathcal{P}_1$.

Ou

$$(T \circ T_1)(x,y,z) = T_2(x,y,z) \Leftrightarrow T\left(\underbrace{2x+z}_{a_0} + \underbrace{(x+z)}_{a_1} t\right) = (x,z)$$

$$\begin{cases} 2x + z = a_0 \\ x + z = a_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -a_0 + 2a_1 \\ x = a_0 - a_1 \end{cases}, \qquad T(a_0 + a_1 t) = (a_0 - a_1, -a_0 + 2a_1).$$

3) Como

$$T(1,0,0) = (3,0,0), \quad T(0,1,0) = (1,3,0) \quad \text{e} \quad T(0,0,1) = (0,0,2),$$

então

$$M(T; \mathcal{B}_c^3; \mathcal{B}_c^3) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Como os valores próprios de T são os de $M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)$ e como $M(T;\mathcal{B}_c^3;\mathcal{B}_c^3)$ é triangular superior, então os valores próprios de T são as entradas da sua diagonal principal, neste caso 2 e 3, tendo-se $m_a(3) = 2$ e $m_a(2) = 1$. Por outro lado

$$m_g(3) = \dim \mathcal{N}(T - 3I) = \dim \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{nul}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 1.$$

Como $m_g(3) \neq m_a(3)$ então T não é diagonalizável.

4) a)

$$\det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (2-\lambda)\det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)\left((3-\lambda)^2 - 1\right) = (2-\lambda)(3-\lambda+1)(3-\lambda-1) = (2-\lambda)^2(4-\lambda).$$

Logo os valores próprios de A são: 2 e 4. Como A é simétrica, então A é ortogonalmente diagonalizável. Como

$$\mathcal{N}(A - 2I) = L(\{(1,-1,0),(0,0,1)\}) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{N}(A - 4I) = L(\{(1,1,0)\})$$

poderá ter-se a seguinte base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A:

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), (0,0,1), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right\}.$$

Assim

$$P^T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

b) Tem-se

$$\sqrt{A} = P^T\sqrt{D}P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}+1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}+1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}+1 & \frac{\sqrt{2}}{2}+1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

5)

A base $\mathcal{B} = \{1+t, 1+t^2, 1\}$ é ortonormada se e só se $G_{\mathcal{B}} = I$. Assim e atendendo a que

$$S_{\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_2} \to \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

um produto interno em $\mathcal{P}_2$ para o qual a base ordenada $\{1+t, 1+t^2, 1\}$ seja ortonormada, será dado por:

$$\left\langle a_0 + a_1 t + a_2 t^2, b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \right\rangle = \left(S_{\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_2} \to \mathcal{B}}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}\right)^T G_{\mathcal{B}} S_{\mathcal{B}_c^{\mathcal{P}_2} \to \mathcal{B}}\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \right)^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} =$$

$$a_0b_0 - a_0b_1 - a_1b_0 - a_0b_2 + 2a_1b_1 - a_2b_0 + a_1b_2 + a_2b_1 + 2a_2b_2$$

Relativamente a ele, tem-se

$$\left(L(\{3+t+t^2, 2+t^2\})\right)^\perp =$$

$$\left\{ b_0 + b_1t + b_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : (b_0, b_1, b_2) \in \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \right\} =$$

$$= \left\{ b_0 + b_1t + b_2t^2 \in \mathcal{P}_2 : (b_0, b_1, b_2) \in \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) \right\} = L\left(\{t^2\}\right).$$

Como

$$\left\|t^2\right\| = \sqrt{\langle t^2, t^2 \rangle} = \sqrt{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} = \sqrt{2},$$

então $\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 \right\}$ é uma base ortonormada para $\left(L(\{3+t+t^2, 2+t^2\})\right)^\perp$.

6) Seja

$$U = \{X \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \operatorname{tr}(X) = 0\}.$$

Como $\operatorname{tr}(AX) = \left\langle A^T, X \right\rangle$ (produto interno usual em $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$), tem-se

$$\left\{A^T \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \operatorname{tr}(AX) = 0, \text{ para todo o } X \in U\right\} =$$

$$= \left\{A^T \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : \left\langle A^T, X \right\rangle = 0, \text{ para todo o } X \in U\right\} = U^\perp.$$

Por outro lado, como

$$\dim U = n^2 - 1, \qquad \dim U^\perp = 1 \qquad \text{e} \qquad I \in U^\perp,$$

tem-se

$$U^\perp = L(\{I\})$$

e assim

$$A^T \in L(\{I\}),$$

ou seja,

$$A = \lambda I,$$

para algum escalar λ.