**1)** Como $\{(1,0,0,1),(0,1,1,0)\}$ é uma base ortogonal de $U$ então $d((1,0,1,0),U) = \|P_{U^\perp}(1,0,1,0)\| =$
$=\|(1,0,1,0) - P_U(1,0,1,0)\| = \left\|(1,0,1,0) - \mathrm{proj}_{(1,0,0,1)}(1,0,1,0) - \mathrm{proj}_{(0,1,1,0)}(1,0,1,0)\right\| =$
$=\left\|(1,0,1,0) - \frac{1}{2}(1,0,0,1) - \frac{1}{2}(0,1,1,0)\right\| = \left\|\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)\right\| = 1.$

**2)** $\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = (-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} + (-1)^{1+4}\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} =$

$= -(-1)^{2+4}(-1)\det\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + (-1)^{1+4}(-1)^{3+1}\det\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = -1-1 = -2.$

**3)** $\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)\left(\lambda^2-1\right)$. Logo os valores próprios de $A$ são $1$ e $-1$.

Como $\mathcal{N}(A-I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = L(\{(1,0,1),(0,1,0)\})$ e $\mathcal{N}(A+I) = \mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) =$
$= L(\{(1,0,-1)\})$ então $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),(0,1,0),\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$ é uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de $A$, uma vez que os vectores próprios de $A$ nesse conjunto são ortogonais dois a dois e têm norma 1.

**4) a)** Como $T(1+t^2) = 1+t^2$ e $T(t+t^2) = t+t^2$ então $1$ é valor próprio de $T$ e $1+t^2$ e $t+t^2$ são dois vectores próprios de $T$, linearmente independentes e associados ao valor próprio 1. Como $T(1-t^2) = (-1)(1-t^2)$ então $-1$ é valor próprio de $T$ e $1-t^2$ é um vector próprio de $T$ associado ao valor próprio $-1$. Logo $m_g(1) = 2$ e $m_g(-1) = 1$ e assim, como $\dim \mathcal{P}_2 = 3$ então $m_a(1) = 2$, $m_a(-1) = 1$, sendo assim $1$ e $-1$ os únicos valores próprios de $T$.

**b)** $T(1-t) = T(1+t^2-t-t^2) = T(1+t^2) - T(t+t^2) = 1+t^2-t-t^2 = 1-t$ logo $1-t$ é vector próprio de $T$ associado ao valor próprio 1.

**c)** Pela alínea a) $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{vp} = \{1-t^2, 1+t^2, t+t^2\}$ é uma base de $\mathcal{P}_2$ de vectores próprios de $T$ então $T$ é diagonalizável, isto é, $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**5) a)** $\langle a_0+a_1t, b_0+b_1t\rangle = \left(\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}\right)^T \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}} = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} =$
$= \left(\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}\right)^T \begin{bmatrix} 18 & 19 \\ 19 & 27 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \end{bmatrix}$ então $G_{\mathcal{B}_c} = \begin{bmatrix} 18 & 19 \\ 19 & 27 \end{bmatrix}$
e assim $\|t\| = 3\sqrt{3}$.

**b)** Como $\mathcal{N}\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 18 & 19 \\ 19 & 27 \end{bmatrix}\right) = L(\{(8,-1)\})$ então $(L(\{1-t\}))^\perp = L(\{8-t\})$ e assim, $\{8-t\}$ é uma base para $(L(\{1-t\}))^\perp$.

**6)** Como $\mathcal{N}(A+I) = L(\{(4,3)\}) \neq \{\mathbf{0}\}$ e $\det A = -1 = (-1)\,1$ então os valores próprios de $A$ são reais e sendo $A$ real normal de valores próprios reais então é simétrica e assim $\mathcal{N}(A-I) = (\mathcal{N}(A+I))^\perp = L(\{(3,-4)\})$ e $A$ é ortogonalmente diagonalizável, tendo-se

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}}_{P^T}\underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}}_{P} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{25} & -\frac{24}{25} \\ -\frac{24}{25} & \frac{7}{25} \end{bmatrix}.$$

**7)** Se $n=1$ então $A$ é diagonal. Seja $n>1$. Como $\operatorname{tr} A \neq 0$ então $A \neq \mathbf{0}$ e assim $u \neq \mathbf{0}$, e como $Au = uv^Tu = \left(v^Tu\right)u$ então $v^Tu$ é um valor proprio de $A$. Como $A = uv^T$ tem característica 1 pois todas as colunas de $A$ são múltiplas de uma coluna de $A$, então $\dim \mathcal{N}(A) = n-1 > 0$ e assim 0 é um valor próprio de $T$ com $m_g(0) = n-1$. Além disso, como $v^Tu = \operatorname{tr} A \neq 0$ então $m_g\left(v^Tu\right) = 1$. Logo, como $m_g\left(v^Tu\right) + m_g(0) = n$ então $A$ é diagonalizável.