Resolução do 3^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR - LEIC

1) a) $U=\mathcal{N}\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\0&1&0&1\end{bmatrix}=\mathcal{N}\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$. Logo $U^{\perp}=L\left(\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}\right)$. Como o conjunto $\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}$ é ortogonal e não contém o vector nulo, é então uma base ortogonal para $U^{\perp}$.

b) Base ortogonal de V formada só por vectores próprios de A, utilizando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt: $\left\{(1,0,0,1),(1,0,1,0)-\operatorname{proj}_{(1,0,0,1)}(1,0,1,0)\right\}=\left\{(1,0,0,1),\left(\frac{1}{2},0,1,-\frac{1}{2}\right)\right\}$ ou ainda: $\{(1,0,0,1),(1,0,2,-1)\}$. Logo $P_V(-1,1,0,0)=\operatorname{proj}_{(1,0,0,1)}(-1,1,0,0)+\operatorname{proj}_{(1,0,2,-1)}(-1,1,0,0)=-\frac{1}{2}(1,0,0,1)-\frac{1}{6}(1,0,2,-1)=\left(-\frac{2}{3},0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

c) Como $(0,1,0,0)\in V^{\perp}=\mathcal{N}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\1&0&1&0\end{bmatrix}=L\left(\{(-1,0,1,1),(0,1,0,0)\}\right)$ então $d\left((0,1,0,0),V\right)=\left\|P_{V^{\perp}}(0,1,0,0)\right\|\underset{(0,1,0,0)\in V^{\perp}}{=}\|(0,1,0,0)\|=1$.

2) $B=\{(-1,1),(1,0)\}$ é uma base ordenada de $\mathbb{R}^2$ e tem-se $S_{B_c^2\to B}=\begin{bmatrix}-1&1\\1&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}$. Para que B seja ortonormada é necessário que se tenha $G=I$ que por sua vez é simétrica e definida positiva, pelo que a aplicação $\langle,\rangle:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dada por $\langle(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle=\left(\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}_B\right)^T I\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}_B=\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\right)^T\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ define em $\mathbb{R}^2$ um produto interno, tendo-se

$$\langle(1,0),(0,1)\rangle=\left(\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)^T\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=1.$$

3) $$\det\begin{bmatrix}\pi&1&1&1&1\\0&0&-1&0&1\\-1&0&0&0&0\\2&-1&2&1&1\\4&1&0&0&0\end{bmatrix}=(-1)(-1)^{3+1}\det\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&-1&0&1\\-1&2&1&1\\1&0&0&0\end{bmatrix}=-(-1)^{4+1}\det\begin{bmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\2&1&1\end{bmatrix}=1.$$

4) a) Como $T(1,0,0)=(1,0,-2)$, $T(0,1,0)=(0,0,0)$ e $T(0,0,1)=(0,1,1)$ então

$$M\left(T;B_c^3;B_c^3\right)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\-2&0&1\end{bmatrix}.$$

Sendo $A=M\left(T;B_c^3;B_c^3\right)$ tem-se $\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda&0&0\\0&-\lambda&1\\-2&0&1-\lambda\end{bmatrix}=-\lambda(\lambda-1)^2$. Logo os valores próprios de T são: 0 e 1. Como $\mathcal{N}(T)\underset{B_c^3}{=}\mathcal{N}(A)=L\left(\{(0,1,0)\}\right)$ e $\mathcal{N}(T-I)\underset{B_c^3}{=}\mathcal{N}(A-I)=L\left(\{(0,1,1)\}\right)$ então $\{(0,1,0)\}$ é base do espaço próprio $\mathcal{N}(T)$, e $\{(0,1,1)\}$ é base do espaço próprio $\mathcal{N}(T-I)$. Além disso, como T não é diagonalizável, uma vez que $\dim\mathbb{R}^3=3>2=\dim\mathcal{N}(T)+\dim\mathcal{N}(T-I)$, então T não é uma projecção.

b) Como $\dim\mathcal{N}(T)=\mathcal{N}(T-I)=1$ e não sendo os vectores de $\mathcal{N}(T)$ ortogonais aos de $\mathcal{N}(T-I)$, então não poderão existir 2 vectores proprios de T que sejam ortogonais, não podendo assim fazer parte de nenhuma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

5) $\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -2 \\ 0 & 4-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}=-\lambda(\lambda-4)^2$. Logo os valores próprios de A são: 0 e 4. Como A é simétrica, então A é ortogonalmente diagonalizável. Como

$$\mathcal{N}(A)=L(\{(1,0,1)\}), \qquad \mathcal{N}(A-4I)=L(\{(0,1,0),(-1,0,1)\})$$

poderá ter-se a seguinte base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A:

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),(0,1,0),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

$$\text{Logo: } B=\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}}_{P^T}\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\sqrt{D}}\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}}_{P}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6) Como A é não invertível então 0 é valor próprio de A. Como $\mathcal{N}(A-2I)=L(\{(1,0,1),(0,1,0)\})$ e o conjunto $\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ é linearmente independente então $m_g(2)=\dim\mathcal{N}(A-2I)=2$. Assim 0 e 2 são os únicos valores próprios de A. Como A é simétrica e só tem 2 valores próprios então

$$\mathcal{N}(A)=(\mathcal{N}(A-2I))^{\perp}=\mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=L(\{(-1,0,1)\}).$$

Como A é simétrica, então A é ortogonalmente diagonalizável. Uma base ortonormada de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A:

$$\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right),(0,1,0),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}.$$

$$\text{Assim, tem-se: } A=\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}}_{P^T}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}}_{P}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

7) Como A é normal, então A é unitariamente diagonalizável, isto é, existe uma matriz unitária U^H tal que $A=U^HDU$, com $D=\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$ e os λ_i eventualmente não todos distintos.

Considerando $Q=U^HCU$ com $C=(c_{ij})$ e $c_{ij}=\begin{cases} \frac{\lambda_i}{\bar{\lambda}_i} & \text{se } \lambda_i\neq 0 \text{ e } i=j \\ 1 & \text{se } \lambda_i=0 \text{ e } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases}$ tem-se

$$QQ^H=I \quad \text{e} \quad A^HQ=A.$$