Resolução do 3º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR
CURSOS: LEAN, LEMat e MEQ

1) a) $U = \mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{N}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L\left(\{(-1,0,1,0),(-1,0,0,1)\}\right).$
Logo

$$U^{\perp} = L\left(\{(1,0,1,1),(0,1,0,0)\}\right).$$

Como o conjunto $\{(1,0,1,1),(0,1,0,0)\}$ é ortogonal é então uma base ortogonal para $U^{\perp}$.

b) $d\left((1,1,1,1),U\right) = \|\mathrm{proj}_{U^{\perp}}(1,1,1,1)\| \underset{(1,1,1,1)\in U^{\perp}}{=} \|(1,1,1,1)\| = 2.$

c) Como $V = L\left(\{(1,0,1,1),(0,1,0,0)\}\right) = U^{\perp}$ então

$$(1,0,0,0) = \underbrace{P_U(1,0,0,0)}_{u} + \underbrace{P_{U^{\perp}}(1,0,0,0)}_{v} = u + \underset{(1,0,1,1)}{\mathrm{proj}}(1,0,0,0) + \underset{(0,1,0,0)}{\mathrm{proj}}(1,0,0,0) =$$

$$= u + \frac{\langle (1,0,0,0),(1,0,1,1)\rangle}{\|(1,0,1,1)\|^2}(1,0,1,1) + \frac{\langle (1,0,0,0),(0,1,0,0)\rangle}{\|(0,1,0,0)\|^2}(0,1,0,0) = u + \left(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right).$$

Logo $(1,0,0,0) = \left(\frac{2}{3},0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ com

$$\left(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \in V \quad \text{e} \quad \left(\frac{2}{3},0,-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3}(-1,0,1,0) - \frac{1}{3}(-1,0,0,1) \in U.$$

2) $\det A = 2(-1)^{3+4}\det\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = -2(-3)(-1)^{1+2}\det\begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = -24 \neq 0$
logo A é invertível e

$$(A^{-1})_{(2,3)} = \left(\tfrac{1}{\det A}(\mathrm{cof}\,A)^T\right)_{(2,3)} = \tfrac{1}{\det A}(\mathrm{cof}\,A)_{(3,2)} = -\tfrac{1}{24}(-1)^{3+2}\det\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

3) $\det\left(2B^TABA^{-1} - 3B^T\right) = \det\left(B^T\left(2ABA^{-1} - 3I\right)\right) = \det B^T \det\left(A(2B-3I)A^{-1}\right) =$
$= \det B \det A \det(2B-3I)\det A^{-1} = (-1)\det\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 5.$

4) a) e **b)** Como $T(-1,1,-1) = -2(-1,1,-1)$, $T(1,0,1) = -2(1,0,1)$ e $T(-1,0,1) = 0(-1,0,1)$ então

$$\mathbb{R}^3 = \mathcal{N}(T-(-2)I) \oplus \mathcal{N}(T-0I)$$

com $\dim\mathcal{N}(T-(-2)I) = 2$ e $\dim\mathcal{N}(T-0I) = 1$. Logo -2 e 0 são os únicos valores próprios de T.
Como $\mathcal{N}(T-(-2)I) = L\left(\{(-1,1,-1),(1,0,1)\}\right)$ e $(1,1,1) = (-1,1,-1) + 2(1,0,1)$
então $(1,1,1) \in \mathcal{N}(T-(-2)I)$ e assim $(1,1,1)$ é vector próprio de T associado ao valor próprio -2.

5)

$$\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 2\\ 0 & 2 & 4-\lambda\end{bmatrix}=-\lambda(\lambda-1)(\lambda-5).$$

Logo os valores próprios de A são: $0, 1$ e 5. Como A é simétrica, então A é ortogonalmente diagonalizável. Assim, uma vez que

$$\mathcal{N}(A)=L(\{(0,-2,1)\}),\qquad \mathcal{N}(A-I)=L(\{(1,0,0)\})\qquad \text{e}\qquad \mathcal{N}(A-5I)=L(\{(0,1,2)\})$$

tem-se uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A:

$$\{(0,-2,1),(1,0,0),(0,1,2)\}.$$

$$\text{Logo: } A=\left(\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -\frac{2\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5}\\ \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5}\end{bmatrix}}_{P^T}\underbrace{\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{5}\end{bmatrix}}_{\sqrt{D}}\underbrace{\begin{bmatrix}0 & -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{\sqrt{5}}{5}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5}\end{bmatrix}}_{P}\right)^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5}\\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{5}\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 4\end{bmatrix}.$$

Logo $B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{5}\\ 0 & \frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{5}\end{bmatrix}$ é a matriz de valores próprios não negativos tal que $B^2=A$.

6) Como A é simétrica e como 1 e -1 são os únicos valores próprios de A, uma vez que $m_g(1)=2$, então

$$\mathcal{N}(A+I)=(\mathcal{N}(A-I))^{\perp}=\mathcal{N}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}=\mathcal{N}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=L(\{(1,-1,0)\}).$$

Logo, aplicando o método de ortogonalização de Gram-Schmidt à base $\{(1,1,1),(2,2,1)\}$ do espaço próprio $\mathcal{N}(A-I)$, obtem-se uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de A:

$$\left\{(1,-1,0),(1,1,1),(2,2,1)-\operatorname*{proj}_{(1,1,1)}(2,2,1)\right\}=\left\{(1,-1,0),(1,1,1),(2,2,1)-\frac{5}{3}(1,1,1)\right\}=$$

$$=\left\{(1,-1,0),(1,1,1),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right)\right\}\quad \text{ou ainda:}\quad \{(1,-1,0),(1,1,1),(1,1,-2)\}.$$

$$\text{Logo } A=\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{3}\end{bmatrix}}_{P^T}\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}_{D}\underbrace{\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3}\\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{6}}{3}\end{bmatrix}}_{P}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

7) Como A é ortogonalmente diagonalizável então $A=P^TDP$, com D matriz diagonal em que a diagonal principal é formada pelos valores próprios não negativos de A.
Como $A^2B=BA^2$ então $\left(P^TDP\right)^2B=B\left(P^TDP\right)^2$ isto é $P^TD^2PB=BP^TD^2P$. Por outro lado:

$$P^TD^2PB=BP^TD^2P\Leftrightarrow D^2\left(PBP^T\right)=\left(PBP^T\right)D^2.$$

Sendo $C=PBP^T$ tem-se então $(\lambda_i)^2c_{ij}=c_{ij}(\lambda_j)^2$. Se $c_{ij}\neq 0$ então $\lambda_i=\lambda_j$ uma vez que os valores próprios são não negativos. Logo $DC=CD$ pelo que $D\left(PBP^T\right)=\left(PBP^T\right)D$ isto é $\left(P^TDP\right)B=B\left(P^TDP\right)$ ou seja $AB=BA$.