Instituto Superior Técnico | 2º Semestre 2017/2018
Departamento de Matemática | 2 de Junho de 2018
Secção de Álgebra e Análise | Duração: 90 minutos

3º TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LENO - MEAer - MEAmbi - MEBiol - MEEC - MEM - MEMec - MEQ

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS

1) (1.5) Calcule $\det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & \sqrt{2} & 0 & 7 \\ 5 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & -2 & 0 \\ 3 & 4 & \sqrt{5} & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

2) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

a) (1.0) Verifique que o polinómio característico de A é dado por $(2-\lambda)^2(1-\lambda)$.

b) (1.0) determine as multiplicidades geométricas dos valores próprios de A e diga se A é diagonalizável.

3) Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$ e os seguintes subespaços

$$U = L(\{(1,0,-1,0),(1,0,0,-1)\}), \qquad V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+z+w=0\}.$$

a) (1.0) Determine uma base ortogonal para $V^\perp$.

b) (1.0) Determine $P_{U^\perp}(1,0,-1,-1)$.

c) (1.0) Determine $d((1,0,-1,-1), U+V)$.

4) (1.0) Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$. Seja $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$.

Determine, se existirem, uma matriz diagonal D e uma matriz ortogonal P^T tais que $D = PAP^T$.

5) (0.5) Seja $U = L(\{2+t, t+2t^2\})$ um subespaço de $\mathcal{P}_2$. Considere em U um produto interno $\langle , \rangle$ para o qual a base ordenada $\{2+t, t+2t^2\}$ seja ortonormada. Determine, para esse produto interno, uma base ortonormada para U que inclua o vector $\sqrt{2}+\sqrt{2}\,t+\sqrt{2}\,t^2$.

6) (0.5) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b & -4 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ -6 & 4 & 1 \end{bmatrix}$. Verifique se existem a e b de modo a que A e B sejam semelhantes.

7) (1.5) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que A é hermitiana e semidefinida positiva. Mostre que é única a matriz B hermitiana e semidefinida positiva tal que $B^2 = A$.