Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática

2^o Semestre 2013/2014
31 de Maio de 2014
Duração: 90 minutos

3^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR

LEAN - LEMat - MEAer - MEAmbi - MEMec - MEEC

1) Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^4$. Considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$V = \left\{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x+y=0\right\}, \qquad W = L\left(\left\{(0,0,1,1), (1,-1,0,0), (0,0,1,0)\right\}\right).$$

a) (1.0) Determine, justificando, uma base ortogonal para $V^\perp$.

b) (1.0) Determine, justificando, $P_V(2,2,1,1)$.

c) (1.0) Determine, justificando, uma base ortogonal para $\mathbb{R}^4$ que inclua 3 vectores de W.

2) (1.0) Seja $\mathcal{P}_1 = \{a_0 + a_1 t : a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$ o espaço linear real dos polinómios reais de grau menor ou igual a 1. Considerando em $\mathcal{P}_1$ um produto interno $\langle , \rangle$ para o qual seja ortonormada a base ordenada $\mathcal{B}$ de $\mathcal{P}_1$ que verifica $S_{\mathcal{B}_c \to \mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B}_c = \{1, t\}$, determine $\|t\|$ relativamente a esse produto interno. Justifique.

3) (1.0) Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Calcule a entrada $(5,2)$ de A^{-1}.

4) Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por: $T(x,y,z) = (x+4z, y, x+4z)$.

a) (1.0) Determine os valores próprios de T, indicando as respectivas multiplicidades algébricas.

b) (1.0) Determine, se existir, justificando, uma base $\mathcal{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$ para a qual a matriz $M(T; \mathcal{B}_1; \mathcal{B}_1)$ seja uma matriz diagonal.

c) (1.0) Considere o produto interno usual em $\mathbb{R}^3$. Diga, justificando, se existe uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$ formada só por vectores próprios de T.

5) (1.0) Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual. Determine, justificando, uma matriz $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ simétrica tal que $\det A = -5$,

$$\mathcal{L}(A+I) = L\left(\left\{(2,1,0), (-1,0,1)\right\}\right) \quad \text{e} \quad \mathcal{L}(A-5I) = L\left(\left\{(1,-1,0), (0,1,-1)\right\}\right).$$

6) (1.0) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ uma matriz hermitiana. Mostre que $(\operatorname{tr} A)^2 \leq (\operatorname{car} A) \operatorname{tr}(A^2)$.