3^o TESTE DE ÁLGEBRA LINEAR - LEGM - MEC

JUSTIFIQUE TODAS AS RESPOSTAS

1) (1.0) Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & \sqrt{3} & \sqrt{2} & 4 \\ 2 & \sqrt{2} & \sqrt{3} & -3 \end{bmatrix}$. Calcule a entrada $(3,1)$ de A^{-1}.

2) (1.0) Sabendo que $\begin{vmatrix} a & b & c & 1 \\ d & e & f & 2 \\ g & h & i & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -\dfrac{2}{3}$ calcule $\begin{vmatrix} 3c & 3b & -3a \\ 2f+i & 2e+h & -2d-g \\ i & h & -g \end{vmatrix}$.

3) (1.0) Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Determine os valores próprios de A e bases para os respectivos subespaços próprios. Diga se A é diagonalizável.

4) (1.0) Considere a matriz que admite os vectores próprios $u = (1,-1,1)$, $v = (1,0,1)$ e $w = (-1,0,1)$, associados respectivamente aos valores próprios 0, 2, e -2. Determine essa matriz.

5) (1.0) Seja $U = L\left(\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}\right)$ e considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual. Determine uma base ortogonal para $\mathbb{R}^4$ que inclua os vectores $(1,1,0,0)$ e $(0,0,1,1)$.

6) (1.0) Seja $V = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x + w = 0\}$ e considere em $\mathbb{R}^4$ o produto interno usual. Calcule $d\left((2,1,1,0),V\right)$.

7) (1.0) Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$. Determine $G_{\mathcal{B}_c}$ onde $\mathcal{B}_c = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$.

8) (1.0) Considere em $\mathbb{R}^3$ o produto interno usual. Determine uma matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ tal que $\operatorname{tr} A = 2$ e $\mathcal{N}(A - 2I) = L\left(\{(1,0,1),(0,1,0)\}\right)$.

9) (1.0) Considere em $\mathcal{P}_1$ um produto interno $\langle , \rangle$ para o qual se tenha $G_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, onde $\mathcal{B}$ é a base ordenada de $\mathcal{P}_1$ que verifica $S_{\mathcal{B}\to\mathcal{B}_c} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathcal{B}_c = \{1, t\}$. Considere a transformação linear $T : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_1$ tal que $M(T;\mathcal{B};\mathcal{B}_c) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Determine uma base ortonormada para $\left(\mathcal{N}(T)\right)^{\perp}$.

10) (1.0) Seja $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ uma matriz normal (isto é $A^H A = A A^H$) tal que $Au = \lambda u$ com $\lambda \in \mathbb{C}$ e $u \in \mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbb{C}) \setminus \{\mathbf{0}\}$. Mostre que $A^H u = \overline{\lambda} u$.